
L'ISOMORPHISME ENTRE LES TOURS DE LUBIN-TATE ET DE DRINFELD : DÉCOMPOSITION CELLULAIRE DE LA TOUR DE LUBIN-TATE

par

Laurent Fargues

Résumé. — Cet article est le premier d’une série visant à construire un isomorphisme entre les tours p -adiques de Lubin-Tate et de Drinfeld, décrire cet isomorphisme et en donner des applications. Nous-y construisons un modèle entier p -adique équivariant en niveau infini de la tour de Lubin-Tate. Ce schéma formel p -adique sera comparé plus tard à un autre associé à la tour de Drinfeld.

Abstract. — This article is the first one of a series aiming to construct an isomorphism between the p -adic Lubin-Tate and Drinfeld towers, describe this isomorphism and give applications. We construct a p -adic equivariant integral model of the Lubin-Tate tower with infinite level. This formal scheme will be later compared to another one associated to the Drinfeld tower.

Introduction générale à la série d’articles sur les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld

Cet article est le premier d’une série visant à construire un isomorphisme entre les tours p -adiques de Lubin-Tate et de Drinfeld, décrire cet isomorphisme et en donner des applications.

Voici une bref description des différents articles :

- Le présent article pour lequel on renvoie à l’introduction qui suit.
- L’article [14] intitulé “L’isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld au niveau des points” dans lequel on construit l’isomorphisme entre les deux tours au niveau des points à valeurs dans des corps valués du type de ceux intervenant dans la théorie des espaces de Berkovich.
- L’article [11] intitulé “Application de Hodge-Tate duale d’un groupe de Lubin-Tate, immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire et filtrations de ramification”. On y décrit entre autres précisément l’isomorphisme entre les deux tours au niveau des squelettes des espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld.
- L’article [13] intitulé “L’isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld : démonstration du résultat principal”. On y démontre l’existence de l’isomorphisme entre les éclatés du schéma formel construit dans le présent article et un autre schéma formel construit à partir de la tour de Drinfeld.
- L’article [12] intitulé “L’isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld : comparaison de la cohomologie des deux tours”. On y démontre que l’isomorphisme construit dans [13] induit un isomorphisme entre les complexes de cohomologie à support compact équivariants des tours de Lubin-Tate et de Drinfeld. On y démontre également l’existence d’une correspondances de Jacquet-Langlands géométrique entre faisceaux équivariants sur l’espace des périodes de Gross-Hopkins et faisceaux équivariants sur l’espace de Drinfeld.

Pour le présent article, les articles [14] et [13] nous suivons le plan fourni par [10] et il apparaîtra comme clair au lecteur que nous nous sommes largement inspirés des travaux de Gerd Faltings.

Les articles [11] et [12] eux sont complètement nouveaux et indépendants de [10].

Introduction à cet article

Cette première partie vise à p -adifier la tour de Lubin-Tate : les modèles entiers usuels de la tour de Lubin-Tate ([6]) sont donnés par le spectre formel d'anneaux du type $\mathbb{Z}_p[[x_1, \dots, x_{n-1}]]$, un idéal de définition étant (p, x_1, \dots, x_{n-1}) . Les modèles entiers naturels de la tour de Drinfeld eux sont p -adiques : l'idéal de définition des schémas formels associés est l'idéal engendré par p , les anneaux associés étant du type $\mathbb{Z}_p \langle x_1, \dots, x_d \rangle / \text{Idéal}$. Pour pouvoir comparer ces deux tours nous devons donc d'abord modifier les modèles usuels de la tour de Lubin-Tate.

Utilisant certains domaines fondamentaux quasicompacts pour l'action des correspondances de Hecke sphériques on reconstruit un modèle entier p -adique en niveau infini de la tour de Lubin-Tate, modèle qui pourra être comparé à la tour de Drinfeld. Ce schéma formel p -adique est obtenu par recollement d'itérés sous les correspondances de Hecke d'un modèle entier p -adique du domaine fondamental.

Ces correspondances de Hecke sont paramétrées par un immeuble de Bruhat-Tits et le schéma formel est obtenu par recollement équivariant de "cellules", des schémas formels affines, indexées par les sommets de l'immeuble. Il est à noter que, contrairement à celle de l'espace de Drinfeld, cette décomposition cellulaire est indexée par les sommets de l'immeuble et non les simplexes. Ainsi on verra par exemple dans les articles [11] et [13] que dans le cas de GL_2 l'image de ces cellules dans l'immeuble de Bruhat-Tits paramétrant l'espace de Drinfeld consiste en les boules de rayon $1/2$ centrées en les sommets de l'immeuble (figure 1).

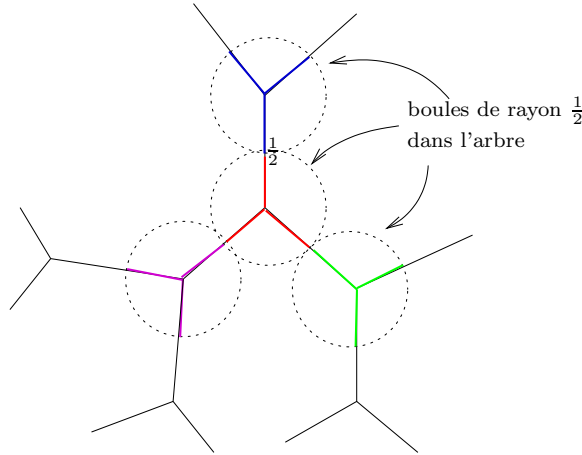


FIGURE 1. La décomposition cellulaire de l'arbre de PGL_2 indexée par les sommets

Le schéma formel p -adique construit n'est pas un schéma formel topologiquement de type fini, il vit en niveau infini. Il n'est pas possible d'effectuer sa construction en niveau fini (par niveau on entend un sous-groupe compact ouvert de $GL_n(\mathbb{Z}_p)$). Plus précisément si $r \in]0, 1[\cap \mathbb{Q}$ et $\mathbb{B}^{n-1}(0, r)$ désigne la boule fermée de rayon r dans $\mathbb{B}^{n-1}(0, 1)$, la base de l'espace de Lubin-Tate (sans niveau), on peut alors construire un tel espace en niveau fini pour l'image réciproque de cette boule dans la tour de Lubin-Tate. Mais lorsque $r \rightarrow 1$, ou si l'on veut lorsque l'on tend vers le bord de l'immeuble de Bruhat-Tits i.e. on sort de tout compact, le niveau doit tendre vers l'infini. Cela est relié au fait suivant. Soit \mathcal{I} l'immeuble de Bruhat-Tits de $PGL_n(\mathbb{Q}_p)$ et $A \subset \mathcal{I}$ un sous-ensemble simpliciale fini. Il existe alors un sous-groupe compact ouvert $K_A \subset GL_n(\mathbb{Z}_p)$ tel que le composé $A \hookrightarrow \mathcal{I} \twoheadrightarrow \mathcal{I}/K_A$ soit un plongement. Mais lorsque A grandit $K_A \rightarrow \{Id\}$.

Décrivons les différentes parties de l'article :

- Dans les sections 2,3 et 4 nous démontrons des résultats généralisant ceux de [18] concernant l'application des périodes de l'espace de Lubin-Tate vers l'espace projectif et les domaines fondamentaux pour les correspondances de Hecke non-ramifiées dans ces espaces. Nous y utilisons pour cela la théorie des Displays qui donne des formules matricielles pour l'application des périodes. Certains de ces résultats sont déjà dans l'article [28] qui utilise le point de vue de [18] des quasi-logarithmes, nous préférons utiliser la théorie des Displays. Puis nous étudions en détails les domaines fondamentaux pour l'action des correspondances de Hecke non-ramifiées sur la base de la tour de Lubin-Tate définis par Gross-Hopkins dans [18]. Ces résultats sont placés dans un cadre plus conceptuel et généralisés dans [11]. Néanmoins les résultats plus complexes de [11] ne sont pas nécessaires à une première compréhension de l'isomorphisme entre les deux tours. C'est pourquoi ils ne sont pas inclus dans cet article. Par exemple dans [11] on montre comment construire de façon systématique des domaines fondamentaux généralisant ceux de Gross-Hopkins et comment comprendre la façon dont ils se recollent avec leurs itérés sous des correspondances de Hecke.
- Les sections 5 à 8 sont le coeur de l'article. Nous y utilisons les domaines fondamentaux de Gross-Hopkins pour décomposer cellulièrement la tour de Lubin-Tate. Nous y construisons à la fin un schéma formel p -adique cellulièrement décomposé au dessus de l'immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire. La cellule au dessus d'un sommet de l'immeuble est le spectre formel d'une algèbre p -adique du type la boule unité dans une algèbre de Banach p -adique obtenue par complétion d'une union croissante $\bigcup_{k \geq 0} \mathcal{A}_k$ où \mathcal{A}_k est une algèbre affinoïde munie de sa norme infinie et $\mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{A}_{k+1}$ est fini. L'algèbre \mathcal{A}_0 est la fibre générique d'un espace de déformations de groupe p -divisible avec contraintes sur le polygone de Newton de ses points de p -torsions. Les algèbres \mathcal{A}_k sont obtenues en ajoutant des points de torsions (structures de niveau).
- Dans l'appendice A on discute de la normalisation des schémas formels p -adiques admissibles dans un revêtement fini de leur fibre générique vue comme espace rigide. On utilise ces résultats de façon cruciale dans la construction de nos schémas formels. Cet appendice est né de diverses questions de géométrie rigide que s'est posées l'auteur et pour lesquelles il n'a pas trouvé de références dans la littérature.
- Soit \mathcal{O} l'anneau des entiers d'une extension de degré fini de \mathbb{Q}_p d'uniformisante π . Dans l'appendice B nous établissons une théorie de la déformation pour les \mathcal{O} -modules π -divisibles relativement aux immersions nilpotentes définies par des idéaux munis de π -analogues des puissances divisées (le cas $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$ et $\pi = p$ étant le cas "classique" traité par la théorie de Messing). Cette section n'est pas strictement nécessaire pour démontrer les résultats auxquels nous nous intéressons mais permet néanmoins d'interpréter agréablement certains objets intervenant dans la définition de l'application des périodes, et accessoirement d'améliorer les résultats d'intégralité de cette application. Les résultats de [9] sont plus généraux que ceux de cet appendice puisqu'ils s'appliquent aux groupes plats finis. Néanmoins dans le cas des groupes p -divisibles la méthode utilisée dans l'appendice B est plus simple que celle de [9].

Prérequis : Concernant les espaces de Lubin-Tate on supposera le lecteur familier avec les chapitres 1 et 4 de [6], le chapitre II de [17] et [18]. Concernant [18] nous n'aurons à utiliser que le corollaire 23.26 de cet article, les autres résultats étant redémontrés et généralisés par d'autres méthodes (la théorie des Displays). Néanmoins la lecture de [18] est fortement conseillée car elle fournit une introduction "concrète" à l'étude détaillée des espaces de Lubin-Tate. Nous utiliserons le langage des espaces de Rapoport-Zink ([24]) qui est le langage naturel de ce type de problème. On pourra consulter [16] pour une reformulation de [17] dans ce langage là. On suppose également le lecteur familier avec la théorie de la déformation de Messing ([22]).

Avertissements : Le lecteur uniquement intéressé par la construction du schéma formels p -adique qui sera relié plus tard à l'espace de Drinfeld peut sauter les chapitres 2 et 4. Néanmoins le résultat concernant l'application des périodes sera utilisé plus tard dans la construction de

l'isomorphisme entre les deux tours. L'appendice B est réservé aux "experts".

Enfin il apparaîtra comme clair au lecteur que l'auteur de cet article s'est largement inspiré des travaux de Gerd Faltings [10].

Introduction bis : Construction du schéma formel dans le cas de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ par éclatements des courbes modulaires

Soit pour $N \geq 3$ $Y(N)$ la courbe modulaire ouverte sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ classifiant les courbes elliptiques E munies d'une structure de niveau N , $N^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \longrightarrow E[N]$, au sens de Katz-Mazur. On a

$$Y(N)(\mathbb{C}) = \coprod_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \Gamma(N) \backslash \mathbb{H}^\pm$$

Fixons un nombre premier p ainsi qu'un entier $N_0 \geq 3$ tel que $(N_0, p) = 1$. Soit E la courbe elliptique universelle sur $Y_0(N) \otimes \mathbb{F}_p$. Considérons le Verschiebung $V : E^{(p)} \longrightarrow E$ c'est à dire l'isogénie duale du Frobenius $F : E \longrightarrow E^{(p)}$. Le morphisme induit au niveau des formes différentielles invariants est

$$V^* : \omega_E \longrightarrow \omega_{E^{(p)}} \simeq \omega_E^{\otimes p}$$

où l'on a fixé un isomorphisme (non canonique) entre fibrés en droites $\omega_{E^{(p)}} \simeq \omega_E^{\otimes p}$. Il fournit une forme modulaire mod p de poids $k-1$

$$H \in \Gamma(Y(N_0)_{\mathbb{F}_p}, \omega_E^{\otimes(p-1)})$$

qui est l'invariant de Hasse. Cela définit un diviseur de Cartier réduit D dans $Y(N_0)_{\mathbb{F}_p}$ de support le lieu supersingulier, un nombre fini de points de la fibre spéciale. Si $y \in Y(N_0)(\overline{\mathbb{F}}_p)_{s.s.}$

$$Y(N_0)_{\widehat{\cdot}_{\{y\}}} \simeq \mathrm{Spf}(W(\overline{\mathbb{F}}_p)[[x]])$$

où l'on peut choisir $x \equiv H \pmod{p}$ (si $p \neq 2, 3$ x peut être choisi égal à une série d'Eisenstein E_{p-1}).

Désormais on notera $Y(N_0)$ pour $Y(N_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}_p^{nr}$ et D pour le diviseur de Cartier précédent étendu à $Y(N_0)_{\overline{\mathbb{F}}_p}$. Soit

$$Y(p^\infty N_0) = \varprojlim_{k \geq 0} Y(p^k N_0)$$

un $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{nr}$ -schéma et

$$\pi : Y(p^\infty N_0) \longrightarrow Y(N_0)$$

la projection. C'est un morphisme plat totalement ramifié au dessus des points supersinguliers. Le schéma $Y(p^\infty N_0)$ est muni d'une action de Hecke de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Le morphisme π est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ -invariant.

Considérons le diviseur de Cartier

$$D_\infty = \pi^* D$$

Il est "infiniment ramifié" au sens où le sous-schéma fermé de $Y(p^\infty N_0)_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ défini par D_∞ possède des nilpotents d'ordre quelconque. Néanmoins $\mathrm{supp}(\pi^* D)$ est un nombre fini de points fermés

$$\pi : \mathrm{supp}(\pi^* D) \xrightarrow{\sim} \mathrm{supp}(D) = Y(N_0)_{s.s.}(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

Le morphisme π étant $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ -invariant D_∞ est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ -invariant

$$\forall g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \quad g^* D_\infty = D_\infty$$

Considérons les itérés de D_∞ par les correspondances de Hecke

$$\{g^* D_\infty \mid g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\}$$

ensemble paramétré par l'arbre de GL_2 . Bien sûr $\forall g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ $\mathrm{supp}(g^* D_\infty) = \mathrm{supp}(D_\infty)$ puisque les correspondances de Hecke laissent invariants le lieu supersingulier. Néanmoins lorsque g varie dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)/\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ ces diviseurs de Cartier sont distincts.

Fixons un entier $\alpha \geq 1$. Pour $A \subset GL_2(\mathbb{Q}_p)/GL_2(\mathbb{Z}_p)$ un sous-ensemble fini de sommets de l'arbre soit

$$X_A = \text{L'éclatement de } Y(p^\infty N_0) \text{ le long du diviseur } \prod_{g \in A} g^* D_\infty^\alpha \text{ de la fibre spéciale } Y(p^\infty N_0)_{\overline{\mathbb{F}}_p}$$

(un diviseur de la fibre spéciale définit un sous-schéma fermé de codimension 2 du modèle entier) et $U_A \subset X_A$ l'ouvert où p engendre le diviseur exceptionnel. En fibre générique, i.e. après inversion de p , $(U_A)_\eta = (X_A)_\eta = Y(p^\infty N_0)_\eta$.

Si $A \subset B$ notons $\Pi_{A,B} : X_B \rightarrow X_A$. On a $\Pi_{A,B}^{-1}(U_A) \subset U_B$ et $\Pi_{A,B}$ induit un isomorphisme

$$\Pi_{A,B} : \Pi_{A,B}^{-1}(U_A) \xrightarrow{\sim} U_A$$

et donc via $\Pi_{A,B}$, $U_A \subset U_B$. Soit

$$Z = \varinjlim_{A \subset GL_2(\mathbb{Q}_p)/GL_2(\mathbb{Z}_p)} U_A$$

où les sous-ensembles finis de l'arbre sont ordonnés par l'inclusion. C'est un schéma sur $\text{Spec}(W(\overline{\mathbb{F}}_p))$ muni d'une action de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ puisque pour $g \in GL_2(\mathbb{Q}_p)$ on a $g : U_A \rightarrow U_{g.A}$. De plus $Z_\eta = Y(p^\infty N_0)_\eta$.

Soit maintenant Z' le normalisé de Z dans sa fibre générique Z_η . Soit \mathfrak{Z} le schéma formel sur $\text{Spf}(W(\overline{\mathbb{F}}_p))$ égal au complété p -adique de Z' . Il est muni d'une action de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Pour $\alpha = 2$ le schéma formel \mathfrak{Z} est "à quelques détails près" le schéma formel p -adique associé à la tour de Lubin-Tate que nous allons construire en général. Nous ne le construirons pas de cette manière. Pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ ce schéma formel \mathfrak{X}_∞ sera un schéma formel p -adique muni d'une action de $GL_2(\mathbb{Q}_p) \times D^\times$ où $D|\mathbb{Q}_p$ est une algèbre de quaternions. On aura alors

$$\mathfrak{Z} \simeq \prod_{i \in I} \mathfrak{X}_\infty / \pi^{a_i \mathbb{Z}}$$

où I est un ensemble fini et $a_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Bien sûr sur la construction précédente on ne voit pas l'action de D^\times , il faut utiliser le théorème de Serre-Tate pour la voir.

1. Hypothèses et notations

Soit $F|\mathbb{Q}_p$ une extension de degré fini, d'uniformisante π et de corps résiduel $k = \mathbb{F}_q = \mathcal{O}_F/\pi\mathcal{O}_F$. On note $\check{F} = \widehat{F^{nr}}$ le complété de l'extension maximale non-ramifiée de F dans une clôture algébrique de celui-ci et F^0 l'extension maximale non-ramifiée de \mathbb{Q}_p dans F . On note parfois \mathcal{O} pour \mathcal{O}_F et $\check{\mathcal{O}}$ pour $\mathcal{O}_{\check{F}}$. On fixe un isomorphisme entre le corps résiduel de $\mathcal{O}_{\check{F}}$ et $\overline{\mathbb{F}}_q$ une clôture algébrique de \mathbb{F}_q .

Si \mathfrak{Z} est un schéma formel d'idéal de définition \mathfrak{I} par définition la catégorie des groupes p -divisibles sur \mathfrak{Z} est la catégorie limite projective

$$\varprojlim_{k \geq 1} (\text{Groupes } p\text{-divisibles sur } \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}/\mathfrak{I}^k))$$

de la catégorie fibrée des groupes p -divisibles sur le système de schémas $(\mathfrak{Z} \bmod \mathfrak{I}^k)_{k \geq 1}$. Cela signifie concrètement que se donner un groupe p -divisible sur \mathfrak{Z} est équivalent à se donner une famille de groupes p -divisibles $(G_k)_{k \geq 1}$ sur les $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}/\mathfrak{I}^k)_{k \geq 1}$ munis d'isomorphismes $\forall k \ G_{k+1} \bmod \mathfrak{I}^k \xrightarrow{\sim} G_k$ satisfaisant une condition de cocycle évidente. Rappelons que si $\mathfrak{Z} = \text{Spf}(A)$ est affine il y a une équivalence de catégories entre groupes p -divisibles sur \mathfrak{Z} et groupes p -divisibles sur $\text{Spec}(A)$ (il s'agit de l'analogue du théorème d'algébrisation de Grothendieck).

Une quasi-isogénie $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ entre deux groupes p -divisibles sur \mathfrak{Z} est un système compatible de quasi-isogénies sur les $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}/\mathfrak{I}^k)_{k \geq 1}$. On prendra garde que la notion de quasi-isogénies sur $\text{Spec}(A)$ est beaucoup plus forte que celle sur $\text{Spf}(A)$.

Si S est un \mathcal{O}_F -schéma ou bien un $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_F)$ -schéma formel un \mathcal{O} -module π -divisible sur S est un groupe p -divisible H sur S muni d'une action de \mathcal{O} induisant l'action canonique sur son algèbre de Lie (cf. appendice B pour plus de détails). Il sera dit formel si ses fibres géométriques en tous les points de la base ne possèdent pas de partie étale.

1.1. Espaces. —

Définition 1.1. — Nous notons \mathbb{H}_0 un \mathcal{O} -module π -divisible formel de dimension 1 et hauteur n sur \mathbb{F}_q . Nous notons $\mathbb{H} = \mathbb{H}_0/\mathbb{F}_q$.

Définition 1.2. — Nous notons \mathfrak{X}_0 l'espace de Lubin-Tate des déformations par isomorphismes de \mathbb{H}_0 , ou encore l'espace des $*$ -déformations d'une loi de groupe formel associée comme dans [18]. Nous notons H_0 la déformation universelle. On note de même \mathfrak{X} , H les objets étendus à $\check{\mathcal{O}}$.

Le \mathcal{O}_F -schéma formel \mathfrak{X}_0 est non-canoniquement isomorphe à $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}[[x_1, \dots, x_{n-1}]])$. Il représente le foncteur qui à une \mathcal{O} -algèbre locale complétée R d'idéal maximal \mathfrak{m} et de corps résiduel \mathbb{F}_q associe les classes d'isomorphisme de couples (H_0, ρ_0) où H_0 est un \mathcal{O} -module π -divisible sur R et

$$\rho_0 : \mathbb{H}_0 \xrightarrow{\sim} H_0 \otimes_R R/\mathfrak{m}$$

Définition 1.3. — On note $\widehat{\mathcal{M}}$ l'espace de Rapoport-Zink associé sur $\mathrm{Spf}(\check{\mathcal{O}})$ des déformations par quasi-isogénies de \mathbb{H} . On note \mathcal{M} l'espace rigide fibre générique associé.

Le schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}$ représente le foncteur qui à un $\mathrm{Spf}(\check{\mathcal{O}})$ -schéma formel \mathcal{S} associe les classes d'isomorphismes de couples (H, ρ) où H est un \mathcal{O} -module π -divisible sur \mathcal{S} et

$$\rho : \mathbb{H} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)} (\mathcal{S} \bmod \pi) \longrightarrow H \times_{\mathcal{S}} (\mathcal{S} \bmod \pi)$$

est une quasi-isogénie.

1.2. Action. — Le groupe \mathbb{H}_0 étant défini sur \mathbb{F}_q , $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{(q)}$ et donc le morphisme de Frobenius définit un élément

$$\Pi = \mathrm{Frob}_q \in \mathrm{End}(\mathbb{H})$$

et alors

$$\mathrm{End}(\mathbb{H}) = \mathrm{End}(\mathbb{H}_0/\mathbb{F}_q) = \mathcal{O}_{F_n}[\Pi] = \mathcal{O}_D$$

l'ordre maximal dans l'algèbre à division D d'invariant $\frac{1}{n}$ où $F_n|F$ désigne l'extension non-ramifiée de degré n . L'action de F_n n'est pas définie sur \mathbb{F}_q mais \mathbb{F}_{q^n} et on a $\mathrm{End}(\mathbb{H}_0) = \mathcal{O}_F[\Pi]$ l'anneau des entiers de l'extension totalement ramifiée de F définie par le polynôme d'Eisenstein $X^n - \pi$.

Définition 1.4. — On muni \mathfrak{X} de l'action à gauche de \mathcal{O}_D^\times et $\widehat{\mathcal{M}}$ de celle de D^\times en posant

$$d.(H, \rho) = (H, \rho \circ d^{-1})$$

pour H un groupe p -divisible et ρ l'isomorphisme ou quasi-isogénie définissant la déformation.

1.3. Scindage de l'espace de Rapoport-Zink. — Rappelons que toute quasi-isogénie de degré zéro entre \mathcal{O} -modules π -divisibles formels de dimension 1 définis sur un schéma réduit annulé par p est un isomorphisme. Il y a donc une décomposition

$$\widehat{\mathcal{M}} = \coprod_{i \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{M}}^{[i]}$$

où $\widehat{\mathcal{M}}^{[i]}$ désigne l'ouvert-fermé de $\widehat{\mathcal{M}}$ où la quasi-isogénie universelle est de hauteur i . De plus,

$$\begin{aligned} \Pi^{-i} : \widehat{\mathcal{M}}^{[0]} &\xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{M}}^{[i]} \\ (H, \rho) &\mapsto (H, \rho \circ \mathrm{Frob}_q^i) \end{aligned}$$

et

$$\widehat{\mathcal{M}}^{[0]} \simeq \mathfrak{X}$$

1.4. Donnée de descente de Rapoport-Zink. — Elle est définie dans la section 3.48 de [24]. Soit σ le Frobenius arithmétique de $F^{nr}|F$. Cette donnée de descente α est donnée dans notre cas par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{M}} & \xrightarrow{\alpha} & \widehat{\mathcal{M}}^{(\sigma)} \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \coprod_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{X} & \xrightarrow{\Pi^{-1} \otimes \sigma} & \coprod_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{X} \end{array}$$

où l'opérateur Π^{-1} est l'identité de \mathfrak{X} décalée de $+1$ dans $\coprod_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{X}$ et $1 \otimes \sigma$ est donné par l'isomorphisme

$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_0 \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \check{\mathcal{O}}$. On voit en particulier qu'elle n'est pas effective puisqu'elle décale de 1 la hauteur de l'isogénie. Cependant elle devient effective sur les quotients $\widehat{\mathcal{M}}/\pi^a \mathbb{Z}$ pour tout entier $a \in \mathbb{N}^*$ (ce qui revient du point de vue cohomologique à prendre les représentations ayant un caractère central d'ordre fini). L'action de D^\times commute à cette donnée de descente α .

Remarque 1.5. — La donnée de descente $1 \otimes \sigma$ définissant \mathfrak{X}_0 sur $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_0 \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \check{\mathcal{O}}$ n'est pas la bonne puisque par exemple elle ne commute pas à l'action de \mathcal{O}_D^\times . Dans [18] Gross et Hopkins utilisent cependant cette donnée de descente quitte à tordre l'action de \mathcal{O}_D^\times en le remplaçant par le groupe étale localement constant $\text{Aut}(\mathbb{H}_0)$ ($\text{Aut}(\mathbb{H}_0)$ est un groupe sur $\text{Spec}(\mathbb{F}_q)_{\text{ét}}$ qui devient constant sur $\text{Spec}(\mathbb{F}_{q^n})$, il définit donc un groupe sur $(\mathfrak{X}_0)_{\text{ét}}$ qui devient constant sur $\mathfrak{X}_0 \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_{F_n}$, $F_n|F$ désignant l'extension non-ramifiée de degré n). Nous préférons cependant adopter le point de vue de Rapoport-Zink.

1.5. Polygone de Newton des points de torsion. — Soit $L|F$ une extension valuée complète pour une valuation à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (il s'agit des corps intervenant dans la théorie des espaces analytiques de Berkovich). Si H est un \mathcal{O} -module π -divisible formel sur \mathcal{O}_L de groupe formel associé \widehat{H} il y a une application “valuation”

$$v : \widehat{H}(\mathcal{O}_L) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

qui est définie en fixant un isomorphisme de \mathcal{O}_L -schémas formels pointés $\text{Spf}(\mathcal{O}_L[[T]]) \xrightarrow{\sim} \widehat{H}$, l'un étant pointé par la section $T = 0$ et l'autre par sa section unité (c'est à dire en fixant une loi de groupe formel associée), par la “valuation de la coordonnée T ”. Cette application ne dépend pas du choix d'un tel isomorphisme puisque tout automorphisme du schéma formel $(\mathbb{A}^1)_{/\{0\}}$ envoyant l'origine sur l'origine induit en fibre générique un automorphisme de \mathbb{B}^1 conservant la distance à l'origine.

On s'intéressera en fait à la valuation des points de torsion $H(\mathcal{O}_L) = \widehat{H}[\pi^\infty](\mathcal{O}_L)$. La “valuation” définit une filtration appelée filtration de ramification inférieure par des sous- \mathcal{O} -modules sur ces points de torsion, formée des sous-modules où la valuation est supérieure à un nombre donné. Elle est étudiée en détails dans [11]. Bornons nous à quelques rappels.

Il existe un système de coordonnées formelles (x_1, \dots, x_{n-1}) sur \mathfrak{X}_0 i.e. un isomorphisme

$$\mathfrak{X}_0 \simeq \text{Spf}(\mathcal{O}[[x_1, \dots, x_{n-1}]])$$

et une loi de groupe formel universelle F^{univ} telle que

$$[\pi]_{F^{\text{univ}}} = \pi u_0 T + x_1 u_1 T^q + \dots + x_{n-1} u_{n-1} T^{q^{n-1}} + u_n T^{q^n}$$

où $u_0, \dots, u_n \in \check{\mathcal{O}}[[x_1, \dots, x_{n-1}]][[T]]^\times$ sont des unités (cf. [21] chapitre 1 page 106, cela se déduit également de la théorie de Cartier cf. [18]). Nous fixons un tel isomorphisme. Pour $\underline{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathfrak{X}_0^{\text{rig}}(\overline{F})$, ou plus généralement $\mathfrak{X}_0^{\text{an}}(L) := \mathfrak{X}_0(\mathcal{O}_L)$ avec $L|F$ une extension valuée complète comme précédemment, on note $H_{\underline{x}}$ la spécialisation du groupe p -divisible universel.

On vérifie alors aisément que le polygone de Newton de la multiplication par π sur la loi de groupe formel universelle est l'enveloppe convexe des $(q^i, v(x_i))_{0 \leq i \leq n}$ où $x_0 = 0$ et $x_n = 1$ (cf. figure 2). Ses pentes non infinies $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, où λ_i apparaît $q^i - q^{i-1}$ fois entre les abscisses

q^{i-1} et q^i , sont les valuations des points de π -torsion non-nuls dans $H_{\underline{x}}[\pi](\mathcal{O}_{\overline{L}}) \setminus \{0\}$. On peut donc lire sur ce polygone de Newton la filtration de ramification de $H_{\underline{x}}[\pi](\mathcal{O}_{\overline{L}})$.

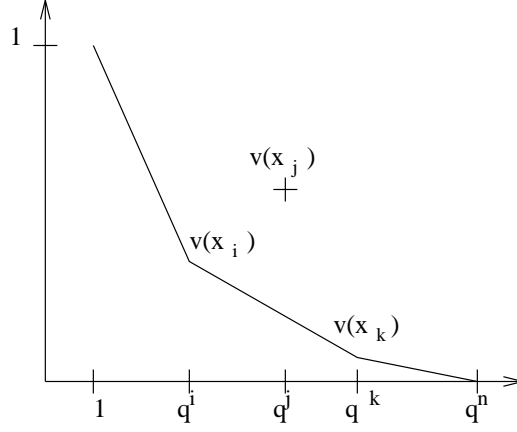


FIGURE 2. Le polygone de Newton de la multiplication par π

Remarque 1.6. — Notons encore H_0 le groupe p -divisible sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}[[\underline{x}]])$ associé à celui sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}[[\underline{x}]])$. Le choix de coordonnées précédentes implique que la stratification de Newton de $H_0 \bmod \pi$ sur $\mathrm{Spec}(k[[\underline{x}]])$ est donnée par

$$V(x_1, \dots, x_{n-1}) \subset \dots \subset V(x_1, x_2) \subset V(x_1)$$

où $V(x_1, \dots, x_{n-1})$ est le lieu supersingulier (le point dont on est parti et qu'on a déformé) et $V(x_1)^c$ le lieu ordinaire, et c'est essentiellement la seule propriété dont nous auront besoin (on trouvera dans [23] la démonstration de l'existence de systèmes de coordonnées formelles sur des espaces de déformation plus généraux tels que la stratification de Newton soit définie par des sous-espaces linéaires). On vérifie en effet que cette seule propriété sur la stratification de Newton implique que le polygone de Newton de $H_0[\pi]$ est celui donné précédemment.

L'ensemble des points de \mathfrak{X}^{rig} où le polygone de Newton de $H[\pi]$ est au dessus d'un polygone donné est un ouvert admissible quasicompact. Cela permet de stratifier l'espace rigide \mathfrak{X}^{rig} par de tels polygones. En quelques sortes les “bonnes coordonnées” sur l'espace \mathfrak{X}^{rig} ne sont pas les $(v(x_i))_{1 \leq i \leq n-1}$ mais celles données par le polygone de Newton précédent.

2. Application des périodes

2.1. Définition. —

Définition 2.1. — On note $\check{\pi}_1 : \mathcal{M}^{[0]} \longrightarrow \mathbb{P}_{\check{F}}^{n-1}$ l'application des périodes telle que définie dans la section 23 de [18] ou plus généralement le chapitre 5 de [24].

Ce morphisme étale \mathcal{O}_D^\times -équivariant d'espaces rigides est défini de la façon suivante. Soit \mathcal{E}_1 le cristal de Messing de H comme objet de $\left((\mathfrak{X} \otimes (\check{\mathcal{O}}/p\check{\mathcal{O}}) / \mathrm{Spec}(\check{\mathcal{O}})) \right)_{NCRIS}$ (le cristal algèbre de Lie de l'extension vectorielle universelle de [22] sur le site cristallin nilpotent). Soit \mathcal{E}_1^{rig} l'isocrystal convergent associé sur \mathfrak{X}^{rig} . Soit \mathcal{E}_2 le cristal de Dieudonné de \mathbb{H} sur $(\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_q) / \mathrm{Spec}(W(\overline{\mathbb{F}}_q)))_{NCRIS}$.

Il y a un plongement

$$\iota : W(\overline{\mathbb{F}}_q) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\check{F}}$$

fixé par le choix de l'isomorphisme entre le corps résiduel de \check{F} et $\overline{\mathbb{F}}_q$. Soit

$$f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\check{F}}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(W(\overline{\mathbb{F}}_q))$$

le morphisme composé. Il y a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} \otimes (\mathcal{O}_{\check{F}}/p\mathcal{O}_{\check{F}}) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\check{F}}) \\ f \bmod p \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_q) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(W(\overline{\mathbb{F}}_q)) \end{array}$$

qui induit donc un morphisme de topos

$$f^{CRIS} : ((\mathfrak{X} \otimes (\mathcal{O}_{\check{F}}/p\mathcal{O}_{\check{F}}) / \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\check{F}}))_{NCRIS} \longrightarrow (\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_q)/\mathrm{Spec}(W(\overline{\mathbb{F}}_q)))_{NCRIS}$$

La quasi-isogénie universelle $\rho : \mathbb{H} \times_{\overline{\mathbb{F}}_q} (\mathfrak{X} \bmod p) \longrightarrow H \times_{\mathfrak{X}} (\mathfrak{X} \bmod p)$ sur l'espace des déformations induit une quasi-isogénie de cristaux

$$\mathbb{D}(\rho) : f^{CRIS*}\mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathcal{E}_1$$

et donc un isomorphisme d'isocristaux convergents

$$(1) \quad f^{rig*}(\mathcal{E}_2^{rig}) = (f^*\mathcal{E}_2)^{rig} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_1^{rig}$$

Si $\mathbb{D}(\mathbb{H})$ désigne le module de Dieudonné covariant “classique” de \mathbb{H} , c'est à dire l'évaluation de \mathcal{E}_2 sur l'épaississement $\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_q) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(W(\overline{\mathbb{F}}_q))$, et $E(H)$ l'extension vectorielle universelle du groupe p-divisible universel H (un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module libre de rang $n[F : \mathbb{Q}_p]$), il y a donc un isomorphisme \mathcal{O}_D^\times -équivariant

$$(2) \quad \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_{W(\overline{\mathbb{F}}_q)_{\mathbb{Q}, \iota}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{rig}} \simeq \mathrm{Lie}(E(H))^{rig}$$

et de plus

$$\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_{W(\overline{\mathbb{F}}_q)_{\mathbb{Q}, \iota}} \check{F} = (\mathrm{Lie}(E(H))^{rig})^{\nabla=0}$$

où ∇ désigne la connexion de Gauss-Manin induite par la structure cristalline de l'extension vectorielle universelle ; si

$$\begin{array}{ccc} & \Delta^{(2)} \hookrightarrow & \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \\ & \swarrow \mathrm{pr}_1 & \searrow \mathrm{pr}_2 \\ \mathfrak{X} & & \mathfrak{X} \end{array}$$

désigne le voisinage infinitésimal d'ordre 2 de la diagonale de \mathfrak{X} , la nature cristalline de l'extension vectorielle universelle induit un isomorphisme

$$\Theta : \mathrm{pr}_1^*E(H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{pr}_2^*E(H)$$

et alors

$$\nabla(m) = \mathrm{Lie}(\Theta)(1 \otimes m) - m \otimes 1$$

On renvoie à la section 5.3 de [5] ou la proposition 2.3.26 de [15] pour la construction des isomorphismes (1) et (2) qui repose sur la construction de Berthelot-Ogus du foncteur des F-cristaux à isogénie près vers les isocristaux convergents. Cette construction repose elle-même sur l'astuce de Dwork ; la structure de Frobenius permet d'agrandir les domaines de définition des solutions de l'équation différentielle $\nabla = 0$ où ∇ est la connexion de Gauss-Manin.

Il est également construit sans recours à la structure de F-cristal mais en utilisant la rigidité des quasi-isogénies dans [24] (cf. proposition 5.15 de [24]).

L'isomorphisme (2) est un isomorphisme de $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} \check{F}$ -modules via l'action de \mathcal{O}_F sur H et \mathbb{H} . Considérons la décomposition isotypique

$$\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{\tau : F^0 \hookrightarrow W(\overline{\mathbb{F}}_q)_{\mathbb{Q}}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}, \tau}$$

Le morphisme $\iota : W(\overline{\mathbb{F}}_q)_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \check{F}$ induit un plongement $\tau_0 : F^0 \hookrightarrow W(\overline{\mathbb{F}}_q)_{\mathbb{Q}}$. Celui-ci induit un isomorphisme $\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}_{F^0, \tau_0}} W(\overline{\mathbb{F}}_q) \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ ($W_{\mathcal{O}}$ désigne les vecteurs de Witt ramifiés, cf. [7]). Notons alors

$$\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} = \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}, \tau_0}$$

où \mathcal{O} est là pour \mathcal{O}_F . C'est un $W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ -module muni d'un Frobenius φ qui est semi-linéaire relativement au Frobenius de $W_{\mathcal{O}}$. C'est un cristal relativement à \mathcal{O} , les cristaux usuels correspondant au cas $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$.

Soit $\alpha : F \otimes_{\mathbb{Q}_p} \check{F} \rightarrow \check{F}$. Le plus grand quotient de $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_{W(\overline{\mathbb{F}}_q)_{\mathbb{Q}, \iota}} \check{F}$ à travers lequel F agit via $F \subset \check{F}$ est

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_{W(\overline{\mathbb{F}}_q)_{\mathbb{Q}, \iota}} \check{F} \right) \otimes_{F \otimes_{\mathbb{Q}_p} \check{F}, \alpha} \check{F} &= \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_{F \otimes W(\overline{\mathbb{F}}_q)_{\mathbb{Q}}} \check{F} \\ &= \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

Notons $(\text{Lie}(E(H))^{rig})'$ le plus grand quotient de $\text{Lie}(E(H))^{rig}$ sur lequel \mathcal{O} agit à travers $F \subset \check{F}$. L'isomorphisme \mathcal{O}_D^{\times} -équivariant (2) induit alors un isomorphisme entre fibrés \mathcal{O}_D^{\times} -équivariants sur \mathfrak{X}^{rig}

$$\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_{W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{rig}} \simeq (\text{Lie}(E(H))^{rig})'$$

La filtration localement facteur directe

$$V(H) \subset \text{Lie } E(H)$$

définie par la partie vectorielle de l'extension universelle est telle que sur son quotient $\text{Lie } H$, \mathcal{O} agisse à travers $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\check{F}}$. Le $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{rig}}$ -module $\text{Lie } E(H)^{rig}$ est libre d'après l'isomorphisme (2). On en déduit (cf. par exemple la démonstration la proposition B.8 de l'appendice B) que si $I = \ker(\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O})$ alors

$$(V(H)^{rig})' := V(H)^{rig} / I \cdot \text{Lie } E(H)^{rig} \hookrightarrow (\text{Lie } E(H)^{rig})'$$

est une filtration localement facteur directe de codimension 1. D'où une filtration

$$(V(H)^{rig})' \subset \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H}) \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{rig}}$$

localement facteur directe de codimension un. Cette filtration définit l'application des périodes

$$\mathfrak{X}^{rig} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H}))$$

Bien sûr cette application s'étend sur tout l'espace de Rapoport-Zink en un morphisme étale D^{\times} -équivariant

$$\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H}))$$

défini de la même façon que précédemment en remplaçant \mathfrak{X} par $\widehat{\mathcal{M}}$. L'espace des périodes $\mathbb{P}(\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H}))$ est en quelques sortes l'espace \mathcal{M} quotienté par la relation d'isogénies, c'est à dire le quotient de la tour de Lubin-Tate par le groupe $\text{GL}_n(F)$.

2.2. Interprétation en termes du cristal \mathcal{O} -extension vectorielle universelle. —

Les résultats de l'appendice B permettent de construire directement l'application des périodes précédente en interprétant $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H)$ et $\text{Lie}(H)/I \cdot \text{Lie}(H)$ comme évaluations d'un cristal algèbre de Lie de la \mathcal{O} -extension vectorielle universelle sur un site cristallin défini en termes de \mathcal{O} -puissances divisées.

Ils permettent par exemple de voir que l'application des périodes est "entière" sur le polydisque $\forall i \ v(x_i) \geq p-1$ alors que la théorie "classique" montre que ce n'est le cas que sur le polydisque $\forall i \ v(x_i) \geq e(p-1)$ où e est l'indice de ramification de $F|\mathbb{Q}_p$.

2.3. La donnée de descente sur l'espace des périodes. —

Le Verschiebung sur le cristal $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})$ induit un isomorphisme

$$\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})^{(\sigma)}$$

qui induit une donnée de descente compatible à l'action de D^{\times} sur l'espace des périodes

$$\mathbb{P}(\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H}))^{(\sigma)}$$

L'application des périodes est compatible à la donnée de descente de Rapoport-Zink sur \mathcal{M} et à cette donnée de descente. On remarquera que cette donnée de descente est effective et que la variété descendue sur F est la variété de Severi-Brauer associée à l'algèbre à division D .

2.4. Formules explicites pour l'application des périodes et applications. — Nous donnons dans cette section des formules explicites pour l'application des périodes en utilisant la théorie des displays de [29]. Ces formules sont plus simples à manipuler que celles utilisées dans [18] basées elles sur la théorie des quasi-logarithmes. Bien que la théorie de [29] concerne des groupes p -divisibles, les résultats de l'appendice B permettent d'étendre celle-ci au cas des \mathcal{O} -modules formels en remplaçant les vecteurs de Witt par les vecteurs de Witt ramifiés (l'auteur n'affirme pas avoir revérifié chaque démonstration de [29], mais il en a revérifié suffisamment pour se convaincre que cela marchait et il invite le lecteur à en faire de même).

2.4.1. Display universel sur \mathfrak{X} . — Considérons le module de Cartier (pour la théorie de Cartier des \mathcal{O} -modules formels) sur $\check{\mathcal{O}}[[x_1, \dots, x_{n-1}]]$ ayant pour V -base e et comme équation structurelle

$$F.e = [x_1]e + V[x_2]e + \dots + V^{n-2}[x_{n-1}]e + V^{n-1}e$$

La loi de \mathcal{O} -module formel associée est la loi universelle considérée dans [18]. Ce module de Cartier provient d'un \mathcal{O} -Display (P, Q, F, V^{-1}) où

$$P = L \oplus T \quad T = \langle \epsilon_1 \rangle \quad L = \langle \epsilon_2, \dots, \epsilon_n \rangle \quad Q = L \oplus I_{W_{\mathcal{O}}}T$$

$I_{W_{\mathcal{O}}}$ désignant l'idéal d'augmentation des vecteurs de Witt, T est un relèvement de l'espace tangent et la matrice de $F \oplus V^{-1}$ dans la base $(\epsilon_i)_i$ est

$$\begin{pmatrix} [x_1] & [x_2] & \dots & [x_{n-1}] & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n \left(W_{\mathcal{O}}(\check{\mathcal{O}}[[x_1, \dots, x_{n-1}]]) \right)$$

Cette matrice s'écrit

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & [x_1] & \dots & [x_{n-1}] \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{I}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

comme dans la formule (86) page 174 de [29], où la matrice de droite est ici la matrice du cristal généralisé (cf. la section B.8 de l'appendice B) du \mathcal{O} -module formel \mathbb{H} que l'on déforme. La matrice de l'opérateur F s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} [x_1] & \pi[x_2] & \dots & \pi[x_{n-1}] & \pi \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \pi & & 0 & 0 \\ & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \pi & 0 \end{pmatrix}$$

2.4.2. Formule pour l'application des périodes. — Notons

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & \pi x_2 & \dots & \pi x_{n-1} & \pi \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \pi & & 0 & 0 \\ & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \pi & 0 \end{pmatrix}$$

la réduite modulo l'idéal d'augmentation de $W_{\mathcal{O}}$ de la matrice précédente et $\forall i \in \mathbb{N}$ $A^{(\sigma^i)}$ la matrice obtenue en remplaçant $\forall k$ x_k par $x_k^{q^i}$. Soit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \pi \\ 1 & & & 0 & 0 \\ & \pi & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \pi & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice de l'opérateur F du cristal de \mathbb{H} . Alors, d'après la proposition 71 de [29]

$$(3) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} (1, 0, \dots, 0).AA^{(\sigma)} \dots A^{(\sigma^{k-1})}B^{-k}$$

existe dans $\Gamma(\mathfrak{X}^{rig}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{rig}})^n$ où l'anneau $\Gamma(\mathfrak{X}^{rig}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{rig}})$ est muni de sa topologie de Frechet usuelle de la convergence uniforme sur toutes les boules fermées de rayon plus petit que un. Notons (f_0, \dots, f_{n-1}) cette limite. Il s'agit également d'une limite au sens de la topologie (x_1, \dots, x_{n-1}) -adique. Plus précisément

$$(f_0, \dots, f_{n-1}) \equiv (1, 0 \dots 0).A \dots A^{(\sigma^{k-1})}B^{-k} \pmod{(x_1^{q^k}, \dots, x_{n-1}^{q^k})}$$

On peut également récrire la limite précédente sous la forme

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \pi^{-l(n-1)} (1, 0 \dots 0).AA^{(\sigma)} \dots A^{(\sigma^{l(n-1)})}$$

Alors, toujours d'après la proposition 71 de [29],

$$\check{\pi}_1 = [f_0 : \dots : f_{n-1}]$$

et on peut récrire

$$\check{\pi}_1 = \lim_{l \rightarrow +\infty} [1 : 0 : \dots : 0].AA^{(\sigma)} \dots A^{(\sigma^{l(n-1)})} \in \mathbb{P}^{n-1}(\Gamma(\mathfrak{X}^{rig}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{rig}}))$$

qui exprime $\check{\pi}_1$ comme une limite d'orbite “ σ -linéaire” dans \mathbb{P}^{n-1} sous l'action de $A \in \mathrm{PGL}_n$.

Exemple 2.2. — Lorsque $n = 2$, si

$$\langle a_1, \dots, a_i \rangle = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_i}}}$$

alors $\check{\pi}_1 = [1 : f(x)]$ où

$$f = \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle \frac{x^{q^{2k}}}{\pi}, x^{q^{2k-1}}, \frac{x^{q^{2k-2}}}{\pi}, \dots, x^q, \frac{x}{\pi} \rangle$$

2.4.3. Application : généralisation d'un théorème de Gross-Hopkins. — Nous généralisons ici le corollaire 23.15 de l'article [18] en utilisant les formules précédentes. Ce théorème a déjà été obtenu dans [28] en utilisant les quasi-logarithmes et n'est donc pas nouveau.

Théorème 2.3 (Yu). — *Le morphisme $\check{\pi}_1$ induit un isomorphisme entre les ouverts admissibles*

$$\{ (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathfrak{X}^{rig} \mid \forall 1 \leq i \leq n \quad \forall 0 \leq j \leq n-1 \quad \frac{1-v(x_i)}{q^n(q^i-1)} < \frac{v(x_j)}{q^n-q^j} \}$$

et

$$\{ [w_0 : \dots : w_{n-1}] \in \mathbb{P}^n \mid w_0 \neq 0 \text{ et } \forall 1 \leq i \leq n \quad \forall 0 \leq j \leq n-1 \quad \frac{1-v(\tilde{w}_i)}{q^n(q^i-1)} < \frac{v(\tilde{w}_j)}{q^n-q^j} \}$$

où on a posé $x_0 = \pi, x_n = 1, \tilde{w}_n = 1, \tilde{w}_0 = \pi$ et $\forall 1 \leq i \leq n-1 \quad \tilde{w}_i = \frac{w_i}{w_0}$. De plus sur ces domaines

$$\forall 1 \leq i \leq n-1 \quad v(x_i) = v\left(\frac{f_i(x_1, \dots, x_{n-1})}{f_0(x_1, \dots, x_{n-1})}\right)$$

Démonstration. On utilise la formule limite (3) pour l'application des périodes. Remarquons qu'avec les notations de la sous-section précédente $A = CB$ où

$$C = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \text{I}_{n-1} \end{array} \right)$$

et que donc, si l'on pose

$$(f_0^{(k)}, \dots, f_{n-1}^{(k)}) = (1, 0 \dots 0).AA^{(\sigma)} \dots A^{(\sigma^{k-1})}B^{-k}$$

alors on a la formule de récurrence

$$\begin{aligned} (f_0^{(k+1)}, \dots, f_{n-1}^{(k+1)}) &= (f_0^{(k)}, \dots, f_{n-1}^{(k)}) \cdot B^k A^{(\sigma^k)} B^{-k-1} \\ &= (f_0^{(k)}, \dots, f_{n-1}^{(k)}) \cdot B^b C^{(\sigma^k)} B^{-b} \end{aligned}$$

où $k = an + b$, $b \in \{0, \dots, n-1\}$. On en déduit les formules de récurrence suivantes :

$$\text{Si } b = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} f_0^{(k+1)} = f_0^{(k)} \\ \forall i > 0 \quad f_i^{(k+1)} = f_i^{(k)} + x_i^{q^k} f_0^{(k)} \end{array} \right.$$

Si $b \neq 0$, en posant $x_0 = 1$ et $\forall i \in \mathbb{Z} \quad x_i = x_j$ où $j \equiv i \pmod{n}$, $j \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_b^{(k+1)} = f_b^{(k)} \\ \forall i \neq b \quad f_i^{(k+1)} = f_i^{(k)} + \pi^{\alpha(b,i)} x_{n-b+i}^{q^k} f_b^{(k)} \end{array} \right.$$

où

$$\alpha(b, i) = \begin{cases} -1 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } 1 \leq i \leq b-1 \\ -1 & \text{si } b+1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

Pour un ϵ tel que $0 < \epsilon < 1$ et pour une fonction $g \in \check{\mathcal{O}}[[x_1, \dots, x_{n-1}]][\frac{1}{\pi}]$ posons

$$V_\epsilon(g) = \sup \left\{ v(g(\underline{x})) \mid \underline{x} \in \mathfrak{X}^{rig} \quad \forall 1 \leq i \leq n \quad \forall 0 \leq j \leq n-1 \quad \frac{1-v(x_i)}{q^n(q^i-1)} \leq \epsilon \frac{v(x_j)}{q^n-q^j} \right\}$$

Il suffit de montrer que

$$\forall \epsilon \quad \forall k > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} V_\epsilon(f_0^{(k)} - 1) > 0 \\ \text{et } \forall 1 \leq i \leq n \quad V_\epsilon(f_i^{(k)} - x_i) > V_\epsilon(x_i) \end{array} \right.$$

($\check{\mathcal{O}}$ étant de valuation discrète cela implique qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall k > 0 \quad V_\epsilon(f_i^{(k)} - x_i) > \alpha + V_\epsilon(x_i)$). Cela ne pose pas de problème en utilisant les formules de récurrence données précédemment. \square

Remarque 2.4. — L'ouvert admissible précédent est l'ensemble des points $\underline{x} \in \mathfrak{X}^{rig}$ où le polygone de Newton de $H_{\underline{x}}[\pi]$ de pentes $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ vérifie

$$\frac{\lambda_1}{q^n} < \lambda_n$$

ou encore les valuations des éléments de $H_{\underline{x}}[\pi^2] \setminus H_{\underline{x}}[\pi]$ sont strictement plus petites que celles de $H_{\underline{x}}[\pi]$. Cela se déduit des égalités

$$\lambda_1 = \sup \left\{ \frac{1-v(x_i)}{q^i-1} \mid 1 \leq i \leq n \right\} \text{ et } \lambda_n = \inf \left\{ \frac{v(x_j)}{q^n-q^j} \mid 0 \leq j \leq n-1 \right\}$$

Il s'agit en fait d'un domaine fondamental "ouvert" pour les isogénies déformant une puissance de π i.e. pour les opérateurs de Hecke non-ramifiés de degré un multiple de n , le domaine fondamental de Gross-Hopkins défini dans la section suivante étant quant à lui un domaine fondamental pour les isogénies quelconques i.e. tous les opérateurs de Hecke non-ramifiés. Partant de ce point de vue on donne une autre démonstration plus conceptuelle d'une partie de ce théorème dans la section 4.

Plus généralement dans l'article [11] nous étudions plus en détails l'application des périodes en dehors de cet ouvert admissible comme dans [28].

3. Domaine fondamentale de Lafaille/Gross-Hopkins ([18])

Définition 3.1. — Posons

$$\mathcal{D} = \{ \underline{x} \in \mathfrak{X}^{rig} \mid \forall 1 \leq i \leq n-1 \ v(x_i) \geq 1 - \frac{i}{n} \}$$

un ouvert admissible quasi-compact dans la boule unité ouverte de dimension $n-1$.

Après extension des scalaires à $\check{F}(\pi^{1/n})$ l'espace \mathcal{D} devient isomorphe à la boule unité fermée de rayon 1 et de dimension $n-1$.

Remarque 3.2. — Le domaine \mathcal{D} admet la description intrinsèque (i.e. indépendante du choix de coordonnées) modulaire suivante :

$$\mathcal{D} = \{ \underline{x} \in \mathfrak{X}^{rig} \mid \text{polygone de Newton de } H_{\underline{x}}[\pi] \text{ est } \geq \text{à celui de la figure 3} \}$$

En particulier il est stable sous \mathcal{O}_D^\times puisqu'il ne dépend pas de la déformation ρ mais seulement de la classe d'isomorphisme de $H_{\underline{x}}$.

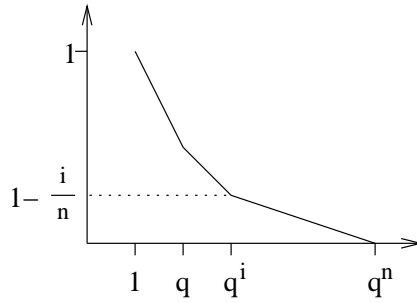


FIGURE 3. Le polygone de Newton bordant le domaine fondamental de Gross-Hopkins

Rappelons la proposition suivante qui est un cas particulier du théorème 2.3 :

Proposition 3.3 (Gross-Hopkins [18]). — *Le morphisme étale $\check{\pi}_1$ restreint à \mathcal{D} induit un isomorphisme entre \mathcal{D} et l'ouvert suivant*

$$\check{\pi}_1(\mathcal{D}) = \{ [y_0 : \dots : y_n] \mid \forall i \ v\left(\frac{y_i}{y_0}\right) \geq 1 - \frac{i}{n} \}$$

Pour toute extension valuée $L|F$ les fibres du morphisme $\check{\pi}_1$ sur les L -points correspondent aux \mathcal{O} -modules π -divisibles isogènes via une isogénie déformant une puissance de π en fibre spéciale. Cependant il existe des points distincts de \mathcal{D} correspondant à des \mathcal{O} -modules π -divisibles isogènes via des isogénies déformant une puissance de Π , ce que précisent les définitions et propositions suivantes. En d'autres termes on cherche à comprendre comment se recolle \mathcal{D} avec ses itérés sous les correspondances de Hecke sphériques.

Définition 3.4. — Pour $1 \leq i \leq n-1$ posons

$$\partial_i \mathcal{D} = \{ \underline{x} \in \mathcal{D} \mid v(x_i) = 1 - \frac{i}{n} \}$$

un domaine de Laurent dans \mathcal{D} .

Remarquons que sur $\partial_i \mathcal{D}$ le polygone de Newton de $H_{\underline{x}}[\pi]$ possède un point de rupture en q^i ce qui correspond à l'existence d'un cran de rang i dans la filtration de ramification du schéma en groupes $H_{\underline{x}}[\pi]$ ou encore à l'existence d'un sous-groupe canonique “généralisé”.

Proposition 3.5 (Faltings). — Soient $\underline{x} \in \mathcal{D}$, $\underline{x}' \in \mathcal{X}^{an}$ et $f : H_{\underline{x}} \rightarrow H_{\underline{x}'}$ une isogénie qui n'est pas un isomorphisme et qui ne se factorise pas par la multiplication par π . Le point \underline{x}' appartient à \mathcal{D} ssi $\exists i \exists \underline{x} \in \partial_i \mathcal{D}$ et f est une isogénie de noyau le sous-groupe de rang i de $F_{\underline{x}}[\pi]$ formé des q^i -points de plus grande valuation (un sous-groupe canonique généralisé).

Démonstration.

Rappelons que si $L|F$ est une extension valuée complète et $\varphi : H_1 \rightarrow H_2$ est une isogénie entre deux \mathcal{O} -modules π -divisibles formels de dimension 1 alors

$$\forall x \in \widehat{H}_1(\mathcal{O}_L) \quad v(\varphi(x)) = \sum_{\alpha \in \ker \varphi} v(x - \alpha)$$

Supposons que $\underline{x} \in \partial_i \mathcal{D}$ et soit $f : H_{\underline{x}} \rightarrow H_{\underline{x}'}$ l'isogénie définie par le quotient des q^i -points de plus grande valuation. Notons $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ les pentes du polygone de Newton de $H_{\underline{x}}[\pi]$ (λ_k est la pente entre les abscisses q^{k-1} et q^k).

Les éléments de $H_{\underline{x}'}[\pi]$ sont de deux types :

- de la forme $f(\alpha)$ où $\alpha \in F_{\underline{x}}[\pi] \setminus \ker f$. Alors, leurs valuations sont (puisque $\forall \beta \in \ker f \quad v(\beta) > v(\alpha)$) $v(f(\alpha)) = q^i v(\alpha)$ et varient donc dans $(q^i \lambda_{i+1}, \dots, q^i \lambda_n)$.
- de la forme $f(\alpha)$ où α est un zéro de la série formelle $[\pi]_{F_{\underline{x}}} - \beta$ avec $\beta \in \ker f \setminus \{0\}$ et $F_{\underline{x}}$ désigne une loi de groupe formel associée à $H_{\underline{x}}$. Le polygone de Newton de cette série formelle est obtenu en prenant l'enveloppe convexe de $(0, v(\beta))$ et celui de $[\pi]_{F_{\underline{x}}}$

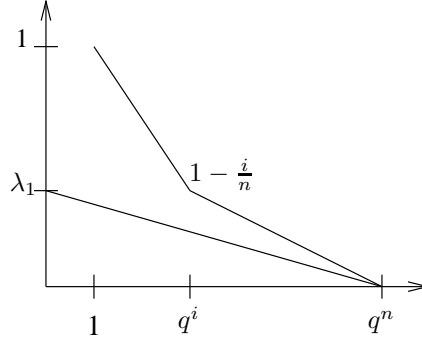


FIGURE 4. Le polygone de Newton de $[\pi]_{F_{\underline{x}}} - \beta$, $v(\beta) = \lambda_1$

Mais, $\sup_{\beta \in \ker f \setminus \{0\}} v(\beta) = \lambda_1$. Or, $\frac{\lambda_1}{q^n} < \lambda_n$. En effet,

$$v(x_1) \geq 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \lambda_1 \leq \frac{1}{n(q-1)} \text{ et } v(x_n) \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \lambda_n \geq \frac{1}{n(q^n - q^{n-1})}$$

Donc, $\forall \beta \in \ker f \setminus \{0\}$ $\text{Newt}([\pi]_{F_{\underline{x}}} - \beta)$ est le segment joignant $(0, v(\beta))$ à $(q^n, 0)$ avec $v(\beta) \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_i\}$ (figure 4). Les valuations des éléments de $[\pi]_{F_{\underline{x}}}^{-1}(\ker f \setminus \{0\})$ sont donc $(\frac{\lambda_1}{q^n}, \dots, \frac{\lambda_i}{q^n})$.

Or, $\frac{\lambda_1}{q^n} < \lambda_i$ puisque $\lambda_1 \leq \frac{1}{n(q-1)}$ et l'égalité $v(x_i) = 1 - \frac{i}{n}$ implique que $\lambda_i \geq \frac{1}{n(q^i - q^{i-1})}$. Donc,

$$\forall \beta \in \ker f \setminus \{0\} \quad \forall \alpha \in [\pi]_{F_{\underline{x}}}^{-1}(\ker f \setminus \{0\}) \quad v(\alpha) < v(\beta)$$

On en déduit que $v(f(\alpha)) = q^i v(\alpha)$ qui sont donc les $(\frac{\lambda_1}{q^{n-i}}, \dots, \frac{\lambda_i}{q^{n-i}})$. Or,

$$q^i \lambda_{i+1} \geq \dots \geq q^i \lambda_n > \frac{\lambda_1}{q^{n-i}} \geq \dots \geq \frac{\lambda_i}{q^{n-i}}$$

Donc, $\underline{x}' \in \partial_{n-i} \mathcal{D}$.

Réciproquement, soit $f : H_{\underline{x}} \longrightarrow H_{\underline{x}'}$ une isogénie comme dans l'énoncé telle que $\underline{x}, \underline{x}' \in \mathcal{D}$. Commençons par remarquer que les analyses précédentes montrent que les valuations des éléments non nuls de $H_{\underline{x}}[\pi^k]$ sont

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > \frac{\lambda_1}{q^n} \geq \dots \geq \frac{\lambda_n}{q^n} > \dots > \frac{\lambda_1}{q^{n(k-1)}} \geq \dots \geq \frac{\lambda_n}{q^{n(k-1)}}$$

où il y a $(q^i - q^{i-1})q^{n(k-1)}$ éléments de valuations $\frac{\lambda_i}{q^{n(k-1)}}$.

Soit $M = \ker f$. Notons

$$k = \sup\{j \mid M[\pi^j] \neq M[\pi^{j-1}]\}$$

Pour j entre 1 et k notons

$$r_j = \dim_{\mathbb{F}_q} M[\pi^j]/M[\pi^{j-1}]$$

On a donc

$$n-1 \geq r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_k > 0$$

Posons pour simplifier les notations $r = r_k$. Le \mathbb{F}_q -e.v. $\pi^{k-1}.M \subset H_{\underline{x}}[\pi]$ est de dimension r . Choissant un drapeau complet de $\pi^{k-1}.M$ raffinant la filtration de ramification inférieure (celle donnée par la valuation) on en déduit que les valuations des éléments de $[\pi^{k-1}]_{F_{\underline{x}}}(M) \setminus \{0\}$ sont de la forme

$$\underbrace{\lambda_{a_1}}_{q-1 \text{ éltts.}} \geq \dots \geq \underbrace{\lambda_{a_r}}_{(q^r - q^{r-1}) \text{ éltts.}}$$

où $\forall j \ a_j \geq j$. Soit $M' \subset H_{\underline{x}}[\pi^{k+1}]$ un sous- \mathcal{O}_K -module tel que $M = M'[\pi^k]$ et $\pi M' = M$. Les valuations des éléments de $M' \setminus M$ sont

$$\frac{\lambda_{a_1}}{q^{nk}} \geq \dots \geq \frac{\lambda_{a_r}}{q^{nk}}$$

et sont en particulier strictement inférieures à celles des éléments de M . On en déduit que $f(M') \subset H_{\underline{x}'}[\pi]$ est un \mathbb{F}_q -e.v. de dimension r dont les valuations des éléments non-nuls sont

$$(4) \quad \underbrace{\frac{\lambda_{a_1}}{q^{nk-(r_1+\dots+r_k)}}}_{(q-1) \text{ éltts.}} \geq \dots \geq \underbrace{\frac{\lambda_{a_r}}{q^{nk-(r_1+\dots+r_k)}}}_{(q^r - q^{r-1}) \text{ éltts.}}$$

Et que donc

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in f(M') \setminus \{0\}} v(\alpha) &= \frac{1}{q^{nk-(r_1+\dots+r_k)}} ((q-1)\lambda_{a_1} + \dots + (q^r - q^{r-1})\lambda_{a_r}) \\ &\leq \frac{1}{q^{nk-(n-1)(k-1)-r}} \underbrace{((q-1)\lambda_1 + \dots + (q^r - q^{r-1})\lambda_r)}_{\leq \frac{r}{n} \text{ car } \underline{x} \in \mathcal{D}} \\ &\leq \frac{r}{nq^{n+(k-1)-r}} \end{aligned}$$

Mais pour un sous- \mathbb{F}_q -ev. N de $H_{\underline{x}'}[\pi]$ de dimension r on a

$$\sum_{\alpha \in N \setminus \{0\}} v(\alpha) \geq \frac{r}{nq^{n-r}}$$

car si $\underbrace{\lambda_{b_1}}_{(q-1) \text{ élt.}} \geq \cdots \geq \underbrace{\lambda_{b_r}}_{(q^r - q^{r-1}) \text{ élt.}}$ sont les valuations des éléments de N

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in N \setminus \{0\}} v(\alpha) &= (q-1)\lambda_{b_1} + \cdots + (q^r - q^{r-1})\lambda_{b_r} \\ &\geq (q-1)\lambda_{n-r+1} + \cdots + (q^r - q^{r-1})\lambda_n \\ &= \frac{1}{q^{n-r}} [(q^{n-r+1} - q^{n-r})\lambda_{n-r+1} + \cdots + (q^n - q^{n-1})\lambda_n] \\ &\geq \frac{r}{nq^{n-r}} \text{ car } \underline{x}' \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

De tous cela on déduit nécessairement que $k = 1$. Si de plus il existe un indice j tel que $a_j > j$ alors les deux inégalités ci-dessus sont strictes. On en déduit donc que $\forall j \ a_j = j$. \square

Remarque 3.6. — Dans [11] nous expliquons plus généralement comment construire des domaines fondamentaux comme celui de Gross-Hopkins à partir de domaines fondamentaux pour l'action du groupe des rotations engendré par le cycle $(1 \dots n)$ dans le simplexe de sommets $1, \dots, n$.

3.1. Lien entre le domaine fondamental et les points C.M.. —

Proposition 3.7. — Soit $E|F$ une extension de degré n . Il existe une unique classe d'isogénie de groupes p -divisible $H_{\underline{x}}$, $\underline{x} \in \mathcal{X}^{rig}$, ayant multiplication complexe par un ordre dans \mathcal{O}_E . Les représentants de cette classe d'isogénie dans \mathcal{D} sont exactement ceux ayant multiplication complexe par l'ordre maximal \mathcal{O}_E . De plus les $\underline{x} \in \mathcal{D}$ tels que $H_{\underline{x}}$ ait multiplication complexe par \mathcal{O}_E forment une \mathcal{O}_D^\times -orbite.

- Si $E|F$ est non-ramifiée cette orbite est $\pi\mathcal{O}_E^{n-1} \subset \mathcal{D}$. Le polygone de Newton associé a une seule pente.
- Si $E|F$ est ramifiée de degré $e > 1$ alors cette orbite est contenue dans

$$\bigcap_{k=1}^{e-1} \partial_k \frac{n}{e} \mathcal{D}$$

Le polygone de Newton a alors comme pentes

$$\forall k \in \{0, \dots, e-1\} \quad \lambda_{kf+1} = \lambda_{kf+2} = \cdots = \lambda_{(k+1)f-1} = \frac{1}{e(q^{(k+1)f} - q^{kf})}$$

cf. la figure 5

Démonstration. Facile. \square

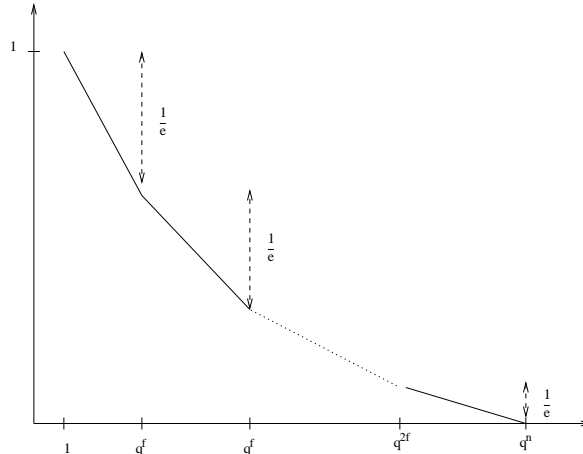


FIGURE 5. Le polygone de Newton d'un groupe C.M.

4. Une autre démonstration d'une partie du théorème 2.3

Soit

$$\mathcal{H} = \{ \underline{x} \in \mathfrak{X}^{rig} \mid \frac{\lambda_{1,\underline{x}}}{q^n} < \lambda_{n,\underline{x}} \}$$

où $\lambda_{1,\underline{x}} \geq \dots \geq \lambda_{n,\underline{x}}$ sont les pentes de $\text{Newt}(H_{\underline{x}}[\pi])$. Il s'agit du domaine fondamental introduit dans l'énoncé du théorème 2.3. Nous donnons une autre démonstration de la partie “isomorphisme sur son image” du théorème 2.3. Cette démonstration utilise moins de calculs explicites et est plus conceptuelle. Cependant elle ne permet pas de démontrer les propriétés “métriques” de l'application des périodes, par exemple calculer l'image par celle-ci des polydisques “fermés” inclus dans \mathcal{H} .

Commençons par un lemme :

Lemme 4.1. — *Soit K un corps valué complet non-archimédien et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme étale entre K -espaces analytiques de Berkovich. C'est un isomorphisme sur son image ssi $\forall L|K$ une extension de corps valués le morphisme f induit une injection de $X(L)$ dans $Y(L)$.*

Démonstration. C'est une conséquence du fait qu'un morphisme étale entre espaces analytiques est un isomorphisme local ssi il induit un isomorphisme au niveau des extensions de corps résiduels. \square

D'après le lemme précédent le théorème 2.3 résulte de la proposition suivante :

Proposition 4.2. — *Soit $L|F$ une extension valuée complète. Soient $\underline{x}, \underline{x}' \in \mathcal{H}(L)$ tels qu'il existe une isogénie $f : F_{\underline{x}} \rightarrow F_{\underline{x}'}$ déformant une puissance de π . Alors $\underline{x} = \underline{x}'$.*

Démonstration. Commençons par constater que $\forall \underline{x} \in \mathcal{H}(L)$, si $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ sont les pentes de $\text{Newt}(H_{\underline{x}}[\pi])$ alors les valuations des points de $H_{\underline{x}}[\pi] \setminus \{0\}, H_{\underline{x}}[\pi^2] \setminus H_{\underline{x}}[\pi], \dots, H_{\underline{x}}[\pi^k] \setminus H_{\underline{x}}[\pi^{k-1}]$ sont “strictement ordonnées” et valent

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > \frac{\lambda_1}{q^n} \geq \dots \geq \frac{\lambda_n}{q^n} > \dots > \frac{\lambda_1}{q^{(k-1)n}} \geq \dots \geq \frac{\lambda_n}{q^{(k-1)n}}$$

Reprenons les notations de la seconde partie de la démonstration de la proposition 3.5 : on considère $f, M, M' \dots$ on obtient alors d'après la formule 4 qu'il existe des éléments dans $H_{\underline{x}'}[\pi]$ de valuation

$$\frac{\lambda_i}{q^{nk-(r_1+\dots+r_k)}} \text{ pour un } i \in \{1, \dots, n\}$$

où rappelons que $1 \leq r_k \leq \dots \leq r_1 \leq n-1$. Par hypothèse

$$n|\text{ht} f = r_1 + \dots + r_k$$

Donc,

$$nk - (r_1 + \dots + r_k) = n \left(k - \underbrace{\frac{r_1 + \dots + r_k}{n}}_{\geq k(1 - \frac{n-1}{n}) = \frac{k}{n} > 0} \right) \geq n$$

On en déduit que

$$\frac{\lambda_i}{q^{nk-(r_1+\dots+r_k)}} \leq \frac{\lambda_i}{q^n}$$

Mais on vérifie que

$$\begin{aligned} \forall \underline{x} \in \mathcal{H} \quad \forall j \quad \lambda_j &\leq \frac{q}{q^n - 1} \\ \text{et } \lambda_j &> \frac{1}{q^{n-1}(q^n - 1)} \end{aligned}$$

\square

Remarque 4.3. — Dans [11] nous donnerons une démonstration conceptuellement plus satisfaisante de ce théorème basée sur de la combinatoire dans un appartement de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\text{PGL}_n(F)$.

5. L'espace des paramètres de la décomposition cellulaire

Il s'agit de l'espace $D^\times \times GL_n(F)$ -équivariant qui va indexer les cellules et qui est l'immeuble de Bruhat-Tits noté \mathcal{I} du groupe p -adique suivant sur F

$$(GL_{n/F} \times D^\times)/\mathbb{G}_m$$

où \mathbb{G}_m agit diagonalement via $z \mapsto z\text{Id}$ dans $GL_n(F)$ et $z \mapsto z^{-1}$ dans D^\times . Il admet la description concrète suivante :

$$\mathcal{I} = \{ (\Lambda, M) \} / \sim \quad \text{où} \quad (\Lambda, M) \sim (\pi\Lambda, \pi^{-1}M)$$

avec Λ un réseau dans F^n et M un réseau \mathcal{O}_D -stable dans D . On notera $[\Lambda, M]$ la classe de (Λ, M) . En d'autres termes

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}(GL_n \times D^\times)/\pi^\mathbb{Z}$$

avec

- $\mathcal{I}(GL_n) = \{ \text{réseaux } \Lambda \text{ dans le module de Tate} \}$
- $\mathcal{I}(D^\times) = \{ \text{cristaux } M \text{ dans le module de Dieudonné rationnel } \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})[\frac{1}{p}] \}$
- L'action de π sur le module de Tate est la même que celle de π^{-1} sur le module de Dieudonné.

On ne considérera pas toute la structure simpliciale de cette immeuble (i.e. pas toutes les relations d'incidence) mais seulement les arêtes orientées suivantes :

Définition 5.1. — Soient $a, a' \in \mathcal{I}$. On note

$a' \longrightarrow a$ s'il existe des représentants $a = [\Lambda, M]$ et $a' = [\Lambda', M]$ tels que

$$\Lambda' \subsetneq \Lambda \subsetneq \pi^{-1}\Lambda' \quad \text{et} \quad M' = \Pi^{-[\Lambda:\Lambda']}M$$

Définition 5.2. — L'action de $GL_n(F) \times D^\times$ sur \mathcal{I} sera

$$\forall (g, d) \in GL_n(F) \times D^\times \quad (g, d) \cdot [\Lambda, M] = [g^{-1}\Lambda, d.M]$$

6. Les cellules rigides en niveau fini

6.1. Digression philosophique. — Supposons que l'on veuille reconstruire $GL_n(F)$ à partir de l'immeuble $GL_n(F)/GL_n(\mathcal{O}_F)$ et de la cellule à l'origine $GL_n(\mathcal{O}_F)$ (cette situation correspond à l'espace de Rapoport-Zink des déformations du groupe étale $(F/\mathcal{O}_F)^n$). Cela n'est pas possible ! En effet, pour $g \in GL_n(F)$ les groupes $gGL_n(\mathcal{O}_F)g^{-1}$ et $GL_n(\mathcal{O}_F)$ sont isomorphes mais *non-canoniquement*, cela dépendant du choix de g qui n'est pas canoniquement déterminé. Cependant on peut reconstruire $GL_n(F)$ à partir de l'immeuble de GL_n et des cellules $\text{Iso}_{\mathcal{O}_F}(\Lambda, \mathcal{O}_F^n)$ pour Λ un réseau de F^n , cellules qui sont des $GL_n(\mathcal{O}_F)$ -torseurs non canoniquement triviaux. Un élément $g \in GL_n(F)$ induit un isomorphisme entre la cellule indexée par Λ et celle indexée par $g.\Lambda$, d'où une action de $GL_n(F)$ sur l'union disjointe de ces cellules. On a alors la décomposition cellulaire $GL_n(F)$ -équivariante indexée par l'immeuble

$$\coprod_{\Lambda} \text{Iso}_{\mathcal{O}_F}(\Lambda, \mathcal{O}_F^n) \xrightarrow{\sim} GL_n(F)$$

Pour un sous-groupe compact ouvert K dans $GL_n(\mathcal{O}_F)$ on peut reconstituer cellulairement une partie de l'espace $GL_n(F)/K$. Plus précisément soit $A \subset GL_n(F)/GL_n(\mathcal{O}_F)$ un sous-ensemble fini tel que $\forall \Lambda \in A \quad K \subset GL(\Lambda)$ i.e. K stabilise Λ . On peut pour $\Lambda \in A$ définir une cellule en niveau $K : \text{Iso}_{\mathcal{O}_F}(\Lambda, \mathcal{O}_F^n)/K$ où K agit sur Λ . Alors,

$$\coprod_{\Lambda \in A} \text{Iso}_{\mathcal{O}_F}(\Lambda, \mathcal{O}_F^n)/K \xrightarrow{\sim} \{ gK \in GL_n(F)/K \mid gGL_n(\mathcal{O}_F) \in A \}$$

6.2. Structures de niveau. —

Définition 6.1. — Soit H le groupe p -divisible universel au dessus de $\widehat{\mathcal{M}}$. Pour Λ un réseau de F^n et $K \subset \mathrm{GL}_n(F)$ un sous-groupe compact ouvert tel que K stabilise Λ on pose

$$\mathcal{M}_{\Lambda,K} = \mathrm{Isom}_{\mathcal{O}}(\pi^{-n}\underline{\Lambda}/\underline{\Lambda}, H[\pi^n]^{rig})/K \quad \text{pour } n \gg 0$$

comme faisceau étale quotient au dessus de \mathcal{M} . Il est représenté par un espace rigide étale fini au dessus de \mathcal{M} .

Soit U un espace rigide quasicompact. On notera (I, ρ, η) pour une section de $\mathcal{M}_{\Lambda,K}$ sur U . Cela signifie que l'on se donne un modèle entier \mathcal{U} de U

$$\mathcal{U}^{rig} \xrightarrow{\sim} U$$

puis une section

$$(I, \rho) \in \widehat{\mathcal{M}}(\mathcal{U})$$

qui définit un élément de $s \in \mathcal{M}(U)$ et enfin une section η du produit fibré du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\Lambda,K} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & & \uparrow s \\ & & U \end{array}$$

que l'on notera parfois en

$$\eta : \Lambda \xrightarrow{\sim} T_p(I) [K]$$

une structure de niveau K sur la fibre générique de I .

Exemple 6.2. — L'espace noté \mathcal{M}_K dans [24] avec $K \subset \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ n'est rien d'autre que $\mathcal{M}_{\mathcal{O}^n, K}$. Bien sûr $\mathcal{M}_{\Lambda,K} \simeq \mathcal{M}_{K'}$ pour un $K' \subset \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$, mais **non-canoniquement**.

Lorsque Λ est fixé et K varie on obtient ainsi une tour d'espaces rigides dont les morphismes de transition sont étales finis et qui est munie d'une action de $\mathrm{GL}(\Lambda) \times D^\times$.

6.3. Functorialité de Hecke des $\mathcal{M}_{\Lambda,K}$. —

6.3.1. Première functorialité. — Il y a des isomorphismes canoniques

$$\forall g \in \mathrm{GL}_n(F) \quad \forall \Lambda \quad \forall K \subset \mathrm{GL}(\Lambda) \quad g : \mathcal{M}_{\Lambda,K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{g^{-1}\Lambda, g^{-1}Kg}$$

définis de façon modulaire par

$$(I, \rho, \eta) \longmapsto (I, \rho, \eta \circ g)$$

6.3.2. Seconde functorialité. —

6.3.2.1. Cas général : — Il s'agit d'isomorphismes

$$\forall \Lambda, \Lambda' \quad \forall K \subset \mathrm{GL}(\Lambda) \cap \mathrm{GL}(\Lambda') \quad \mathcal{M}_{\Lambda,K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\Lambda',K}$$

définis de la façon suivante. Soit U un espace rigide quasicompact et $(I, \rho, \eta) \in \mathcal{M}_{\Lambda,K}(U)$ où $U = \mathcal{U}^{rig}$ et $(I, \rho) \in \widehat{\mathcal{M}}(\mathcal{U})$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\Lambda \subset \pi^N \Lambda' \subset \pi^{-n} \Lambda$$

La structure de niveau η induit

$$\pi^{-n} \Lambda / \Lambda \xrightarrow{\sim} I[\pi^n] \bmod K$$

(on entend par là une section du faisceau étale quotient $\mathrm{Isom}_{\mathcal{O}}(\pi^{-n}\underline{\Lambda}/\underline{\Lambda}, I[\pi^n]^{rig})/K$). Le sous- \mathcal{O} -module $\pi^N \Lambda' / \Lambda \subset \pi^{-n} \Lambda / \Lambda$ est stable sous l'action de K . Il existe donc un unique sous-espace rigide en groupes fini localement libre sur U ,

$$J \subset I[\pi^n]^{rig}$$

tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \pi^N \Lambda' / \Lambda & \xrightarrow{\sim} & J \quad \text{mod } K \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi^{-n} \Lambda / \Lambda & \xrightarrow{\sim} & I[\pi^n]^{rig} \quad \text{mod } K \end{array}$$

D'après la section 5.4 de [25] il existe un éclatement formel admissible $\tilde{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{U}$ donné par certains idéaux de Fittings, induisant donc un isomorphisme $\tilde{\mathcal{U}}^{rig} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}^{rig}$, tel que si \tilde{J} désigne l'adhérence schématique de J dans $I[\pi^n] \times_{\mathcal{U}} \tilde{\mathcal{U}}$ alors \tilde{J} soit un sous-groupe fini localement libre de $I[\pi^n] \times_{\mathcal{U}} \tilde{\mathcal{U}}$. Par adhérence schématique on entend la chose suivante : si $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{I[\pi^n]^{rig}}$ est l'idéal cohérent définissant J comme fermé dans $I[\pi^n]^{rig}$, si

$$sp : I[\pi^n]^{rig} \rightarrow I[\pi^n] \times_{\mathcal{U}} \tilde{\mathcal{U}}$$

est le morphisme de spécialisation associé au modèle formel $I[\pi^n] \times_{\mathcal{U}} \tilde{\mathcal{U}}$ alors

$$\tilde{J} = \text{Spf} \left(\mathcal{O}_{I[\pi^n] \times_{\mathcal{U}} \tilde{\mathcal{U}}} / (sp_* \mathcal{I} \cap \mathcal{O}_{I[\pi^n] \times_{\mathcal{U}} \tilde{\mathcal{U}}}) \right)$$

Alors, le morphisme $\mathcal{M}_{\Lambda, K} \rightarrow \mathcal{M}_{\Lambda', K}$ est défini par

$$(I, \rho, \eta) \mapsto (I \times_{\mathcal{U}} \tilde{\mathcal{U}} / \tilde{J}, q \circ \tilde{\rho} \circ \pi^{-N}, \eta')$$

où $\tilde{\rho}$ est le changement de base de ρ sur \mathcal{U} à $\tilde{\mathcal{U}}$,

$$q : I \times_{\mathcal{U}} \tilde{\mathcal{U}} \rightarrow I \times_{\mathcal{U}} \tilde{\mathcal{U}} / \tilde{J}$$

et η' fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \Lambda' & \xrightarrow[\sim]{\eta'} & T_p(I/J) \quad \text{mod } K \\ \downarrow \pi^{-N} & & \downarrow \\ \Lambda & \xrightarrow[\sim]{\eta} & T_p(I) \quad \text{mod } K \end{array}$$

Exemple 6.3. — Si K et $g^{-1}Kg$ sont contenus dans $\text{GL}_n(\mathcal{O})$ le morphisme classique (section 5.43 de [24], section 2.3.9.3 page 39 de [15]) définissant les correspondances de Hecke

$$\mathcal{M}_K \xrightarrow{g} \mathcal{M}_{g^{-1}Kg}$$

n'est rien d'autre que le composé des deux fonctorialités précédentes

$$\mathcal{M}_K = \mathcal{M}_{\Lambda_0, K} \xrightarrow{g} \mathcal{M}_{g^{-1}\Lambda_0, g^{-1}Kg} \xrightarrow{2^{\text{ème}} \text{ fonctorialité}} \mathcal{M}_{\Lambda_0, g^{-1}Kg} = \mathcal{M}_{g^{-1}Kg}$$

où on a posé $\Lambda_0 = \mathcal{O}^n$.

6.3.2.2. Cas des sous-groupes de congruence principaux : — Dans le paragraphe précédent faisons de plus l'hypothèse que :

$$\exists n \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{Z} \quad K \subset \text{Id} + \pi^n \text{End}(\Lambda) \text{ et } \Lambda \subset \pi^N \Lambda' \subset \pi^{-n} \Lambda$$

Alors, dans la définition du morphisme

$$\mathcal{M}_{\Lambda, K} \rightarrow \mathcal{M}_{\Lambda', K}$$

il n'est pas nécessaire d'effectuer l'éclatement $\tilde{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{U}$. En effet, $\mathcal{M}_{\text{Id} + \pi^n \text{End}(\Lambda)}$ possède un modèle entier défini en utilisant des structures de niveau de Drinfeld (cf. la section II.2 de [17]). On conclut alors grâce au lemme clef suivant :

Lemme 6.4 (lemme II.2.4 de [17]). — Soit H un \mathcal{O} -module formel de dimension 1 et hauteur h sur un \mathcal{O} -schéma S muni d'une structure de niveau de Drinfeld

$$\eta : (\pi^{-n} \mathcal{O} / \mathcal{O})^h \rightarrow H[\pi^n](S)$$

Soit $M \subset (\pi^{-n}\mathcal{O}/\mathcal{O})^h$ un sous- \mathcal{O} -module. Il existe alors un unique sous-groupe fini localement libre $G \subset H[\pi^n]$ tel que $\forall m \in M \ \eta(m) \in G(S)$ et les $(\eta(m))_{m \in M}$ forment un ensemble plein de sections de G au sens de Katz-Mazur.

Remarque 6.5. — Le cas des sous-groupes de congruence principaux est suffisant pour définir le morphisme $\mathcal{M}_{\Lambda,K} \rightarrow \mathcal{M}_{\Lambda',K}$ en général. En effet, $\forall K \subset \mathrm{GL}(\Lambda) \cap \mathrm{GL}(\Lambda') \ \exists K_1 \triangleleft K$ vérifiant les hypothèses de ce paragraphe. On peut donc définir le morphisme $\mathcal{M}_{\Lambda,K_1} \rightarrow \mathcal{M}_{\Lambda',K_1}$ comme expliqué ci-dessus en utilisant les structures de niveau de Drinfeld, vérifier que ce morphisme est K -équivariant puis définir $\mathcal{M}_{\Lambda,K} \rightarrow \mathcal{M}_{\Lambda',K}$ comme

$$\mathcal{M}_{\Lambda,K_1}/K \rightarrow \mathcal{M}_{\Lambda',K_1}/K$$

6.4. Les cellules. —

Définition 6.6. — Soit $[\Lambda, M] \in \mathcal{I}$ et $K \subset \mathrm{GL}_n(F)$ un sous-groupe compact ouvert tel que K stabilise Λ . On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{[\Lambda,M],K} = & \text{ domaine fondamental de Gross-Hopkins dans la fibre générique de l'espace} \\ & \text{des déformations } (H, \rho) \text{ de } \mathbb{H} \text{ par des quasi-isogénies de hauteur } [M : \mathcal{O}_D] \\ & + \text{ une structure de niveau } K, \eta : \Lambda \xrightarrow{\sim} T_p H [K] \end{aligned}$$

Plus précisément, soit $k = [M : \mathcal{O}_D]$ et

$$\mathcal{D}^{[k]}$$

l'ouvert admissible quasicompact dans $\mathcal{M}^{[k]}$ où le polygone de Newton de la multiplication par π sur la loi de groupe formelle universelle est au dessus de celui de la figure 3. Alors $\mathcal{D}_{[\Lambda,M],K}$ est défini par le diagramme cartésien suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{[\Lambda,M],K} & \hookrightarrow & \mathcal{M}_{\Lambda,K}^{[k]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}^{[k]} & \hookrightarrow & \mathcal{M}^{[k]} \end{array}$$

Remarque 6.7. — Si $K \subset \mathrm{GL}(\Lambda)$ et $g \in \mathrm{GL}_n(F)$ sont tels que $g^{-1}\Lambda = \mathcal{O}_F^n$ il y a alors un isomorphisme

$$g \times \Pi^{[M:\mathcal{O}_D]} : \mathcal{D}_{[\Lambda,M],K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{g^{-1}Kg} \subset \mathcal{M}_{g^{-1}Kg}^{[0]}$$

où $\mathcal{D}_{g^{-1}Kg}$ est le revêtement étale fini au dessus de \mathcal{D} défini en mettant des structures de niveau $g^{-1}Kg$. Cependant cet isomorphisme **n'est pas canonique** puisqu'il dépend du choix de g .

Le premier type de fonctorialité définie dans la section 6.3.1 induit une action naturelle de $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times$ sur les cellules de façon compatible à son action sur \mathcal{I} :

$$\forall (g, d) \in \mathrm{GL}_n(F) \times D^\times \quad g \times d : \mathcal{D}_{[\Lambda,M],K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{[g^{-1}\Lambda, d.M], g^{-1}Kg}$$

6.5. Bord des cellules. —

Définition 6.8. — Soient $[\Lambda, M] \in \mathcal{I}$ et K tel que $K \subset \mathrm{Id} + \pi \mathrm{End}_{\mathcal{O}_F}(\Lambda)$. On définit pour $1 \leq i \leq n-1$ les ouverts admissibles quasicompacts (des domaines de Laurent) $\partial_i \mathcal{D}_{[\Lambda,M],K}$ de $\mathcal{D}_{[\Lambda,M],K}$ par le diagramme cartésien suivant

$$\begin{array}{ccc} \partial_i \mathcal{D}_{[\Lambda,M],K} & \hookrightarrow & \mathcal{D}_{[\Lambda,M],K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \partial_i \mathcal{D}_{[\Lambda,M],GL(\Lambda)} & \hookrightarrow & \mathcal{D}_{[\Lambda,M],GL(\Lambda)} \end{array}$$

où $\mathcal{D}_{[\Lambda,M],GL(\Lambda)}$ est la cellule sans structures de niveau notée $\mathcal{D}^{[[M:\mathcal{O}_D]]}$ dans la définition 6.6 et l'ouvert ∂_i est défini de façon modulaire en termes du polygone du Newton de la série formelle $[\pi]_{F^{univ}}$ comme dans la définition 3.4.

Lemme 6.9. — Soient \mathfrak{Z} un schéma formel admissible sur $\mathrm{Spf}(\check{\mathcal{O}})$ et H un \mathcal{O} -module π -divisible formel de dimension 1 et hauteur n . Supposons H muni d'une structure de niveau de Drinfeld

$$\eta : \pi^{-1}\Lambda/\Lambda \longrightarrow H[\pi]$$

Soit i un entier tel que $1 \leq i \leq n-1$. Supposons que $\forall x \in \mathfrak{Z}^{an}$ le polygone de Newton de la multiplication par π sur une loi de groupe formel associée à H_x possède un point de rupture en q^i . La donnée η induit un scindage de l'espace rigide

$$\mathfrak{Z}^{rig} = \coprod_{\substack{E \subset \pi^{-1}\Lambda/\Lambda \\ \dim_{\mathbb{F}_q} E = i}} (\mathfrak{Z}^{rig})_E$$

où $(\mathfrak{Z}^{rig})_E = \{x \in \mathfrak{Z}^{rig} \mid \eta_x(E) \subset H_x[\pi] \text{ est un sous-groupe canonique de rang } i\}$.

Démonstration. Soit \mathfrak{Z}^{an} l'espace de Berkovich fibre générique associé à \mathfrak{Z} . On a

$$(\mathfrak{Z}^{an})_E = \{x \in |\mathfrak{Z}^{an}| \mid \forall w \in E \forall w' \in \pi^{-1}\Lambda/\Lambda \setminus E \ v(\eta_x(w)) > v(\eta_x(w'))\}$$

qui définit bien un ouvert de \mathfrak{Z}^{an} car localement sur \mathfrak{Z} , si l'on fixe une loi de groupe formel $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}[[T]]) \xrightarrow{\sim} \hat{H}$ alors $\forall w \in \pi^{-1}\Lambda/\Lambda \ \eta(w) \in \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$ et la valuation de $\eta(w)$ est donnée par la valuation de cet élément de $\mathcal{O}_{\mathfrak{Z}}$. \square

Remarque 6.10. — Le lemme précédent est une version rigide de “l’astuce de Boyer” (cf. [17]).

Proposition 6.11. — Les bords des cellules se scindent de la façon suivante

$$\partial_i \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K} = \coprod_{\substack{E \subset \pi^{-1}\Lambda/\Lambda \\ \mathrm{rg} E = i}} \partial_{i, E} \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K}$$

où E est un sous- \mathbb{F}_q -ev. de $\pi^{-1}\Lambda/\Lambda$ de rang i et $\partial_{i, E} \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K}$ est l'ouvert admissible de $\partial_i \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K}$ où $\eta(E) \subset H[\pi]_{\eta}$ est l'ensemble des q^i -points de plus grande valuation (un sous-groupe canonique généralisé).

Démonstration. Cela résulte de ce que sur $\partial_i \mathcal{D}$ le polygone de Newton de $[\pi]_{F^{univ}}$ possède un point de rupture en q^i et du lemme précédent. \square

Remarque 6.12. — Bien sûr cette décomposition en niveau K est obtenue par image réciproque de celle en niveau $\mathrm{Id} + \pi \mathrm{End}(\Lambda)$.

Remarque 6.13. — On vérifie que tout cela ne dépend que de $[\Lambda, M]$ i.e. il y a des isomorphismes canoniques $\partial_{i, E} \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K} \xrightarrow{\sim} \partial_{i, \pi E} \mathcal{D}_{[\pi \Lambda, \pi^{-1} M], K}$.

L'action de $\mathrm{GL}_n(F) \times D^{\times}$ conserve le bord des cellules en permutant les composantes indexées par les sous-espaces $E : \forall g \in \mathrm{GL}_n(F) \ g : \partial_{i, E} \rightarrow \partial_{i, g^{-1} \cdot E}$.

6.6. Donnée de recollement. — Soit $p : \pi^{-1}\Lambda \twoheadrightarrow \pi^{-1}\Lambda/\Lambda$. Supposons de plus que $K \subset \mathrm{Id} + \pi \mathrm{End}(p^{-1}(E))$. Le quotient par le sous-groupe canonique généralisé $\eta(E)$ induit alors une immersion ouverte

$$\partial_{i, E} \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K} \hookrightarrow \mathcal{D}_{[p^{-1}(E), \Pi^{-i} M], K}$$

où le Π^{-i} provient de ce que le quotient par le sous-groupe canonique est une déformation de Frob_q^i . Ce morphisme est induit par le second type de fonctorialité de la section 6.3.2 restreint à $\partial_{i, E}$.

6.7. Réécriture en termes des arrêtes orientées de l'immeuble. — Soit $a \longrightarrow a'$ une arrête orientée de \mathcal{I} avec $a = [\Lambda, M]$ et $a' = [\Lambda', M']$ tels que

$$\Lambda \subsetneq \Lambda' \subsetneq \pi^{-1}\Lambda \text{ et } M' = \Pi^{[\Lambda:\Lambda']}M$$

Définition 6.14. — Supposons que $K \subset \text{Id} + \pi\text{End}(\Lambda) \cap \text{Id} + \pi\text{End}(\Lambda')$. On pose

$$\mathcal{D}_{a \rightarrow a', K} = \partial_{i, \Lambda' / \Lambda} \mathcal{D}_{[\Lambda, M], K}$$

où $i = \dim_{\mathbb{F}_q} \Lambda' / \Lambda$

Il y a alors deux immersions ouvertes

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{D}_{a \rightarrow a', K} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathcal{D}_{a, K} & & \mathcal{D}_{a', K} \end{array}$$

où l'application de gauche est l'inclusion canonique et celle de droite est celle définie en 6.6.

Remarque 6.15. — On peut montrer que la seconde application induit un isomorphisme

$$\mathcal{D}_{a \rightarrow a', K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{a' \rightarrow a, K}$$

(cf. la section sur les modèles entiers où tout cela est démontré plus généralement sur les modèles entiers).

Bien sûr toutes ces applications sont équivariantes sous l'action de $\text{GL}_n(F) \times D^\times$ au sens où il y a des isomorphismes se composant naturellement

$$\forall (g, d) \in \text{GL}_n(F) \times D^\times \quad \mathcal{D}_{a \rightarrow a', K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{(g, d).a \rightarrow (g, d).a', g^{-1}Kg}$$

et compatibles aux deux immersions ouvertes ci-dessus.

7. Décomposition cellulaire des espaces rigides en niveau fini

Soit $A \subset \mathcal{I}$ un sous ensemble d'image finie dans $\mathcal{I}(\text{PGL}_n) = \mathcal{I}(\text{GL}_n) / \pi^\mathbb{Z}$ et d'image $\mathcal{I}(D^\times) / \pi^\mathbb{Z}$ ($\simeq \mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$) sur la seconde composante. Soit $K \subset \text{GL}_n(F)$ un sous-groupe compact ouvert tel que $\forall [\Lambda, M] \in A$ le groupe K stabilise Λ et $K \subset \text{Id} + \pi\text{End}(\Lambda)$ (l'image de A dans $\mathcal{I}(\text{PGL}_n)$ étant finie il existe toujours un tel K).

Considérons le diagramme d'espaces rigides fibré au dessus de l'immeuble \mathcal{I} :

$$X_{1, A, K} = \coprod_{\substack{a, a' \in A \\ a \rightarrow a'}} \mathcal{D}_{a \rightarrow a', K} \rightrightarrows \coprod_{a \in A} \mathcal{D}_{a, K} = X_{0, A, K}$$

défini par les deux applications de faces de 6.7. Celui-ci est $\text{GL}_n(F) \times D^\times$ équivariant pour des A et K variant (le diagramme associé à A et K est envoyé naturellement sur celui associé à $(g, d).A$ et $g^{-1}Kg$).

Rappelons que l'on note $\mathcal{M}_K := \mathcal{M}_{\mathcal{O}^n, K}$ l'espace de Rapoport-Zink usuel. L'application naturelle définie par le second type de fonctorialité $\mathcal{M}_{\Lambda, K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_K$ induit un morphisme $X_{0, A, K} \longrightarrow \mathcal{M}_K$.

Proposition 7.1. — *L'image de $X_{0, A, K}$ dans \mathcal{M}_K est un ouvert quasicompact $U_{A, K}$ et la suivante est exacte dans la catégorie des espaces rigides*

$$X_{1, A, K} \rightrightarrows X_{0, A, K} \longrightarrow U_{A, K}$$

Ces suites sont $\text{GL}_n(F) \times D^\times$ -équivariantes lorsque A et K varient. De plus lorsque A grandit et K est de plus en plus petit les $U_{A, K}$ recouvrent toute la tour de Lubin-Tate au sens où les deux ind-pro systèmes d'espaces rigides $(U_{A, K})_{A, K}$ et celui des ouverts de \mathcal{M}_K d'image quasicompacte dans $\mathcal{M}_K / \pi^\mathbb{Z}$ pour K variant sont équivalents.

Démonstration. Les applications étant toutes des unions disjointes d'immersions ouvertes d'espaces quasi-compacts il suffit de vérifier ces assertions au niveau des points ce qui résulte du corollaire 23.26 de [18] et de la proposition 3.5. \square

Exemple 7.2. — Si A est l'image réciproque d'un sous-ensemble fini B de $\mathcal{I}(\mathrm{PGL}_n)$ alors l'ensemble B définit un sous-ensemble de correspondances de Hecke sphériques de $\mathrm{GL}_n(F)$ et $U_{A,K}$ est l'image réciproque dans \mathcal{M}_K de l'itération par ces correspondances sphériques de l'ouvert $D \subset \mathcal{M}^{[0]}$, un ouvert de \mathcal{M} .

Remarque 7.3. — Bien sûr on peut écrire les relations d'incidence supérieures en termes de facettes orientées $a_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_d$ de l'immeuble et de cellules $\mathcal{D}_{a_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_d, K}$.

Application Cohomologique. — Dans cette section la cohomologie étale à support compact des espaces rigides désigne celle définie par Huber. Pour \mathcal{M}_K elle coïncide avec celle définie par Berkovich. Cependant ce n'est pas le cas pour les $U_{A,K}, \mathcal{D}_{a,K} \dots$

Corollaire 7.4. — Pour Λ un anneau de ℓ -torsion ou bien $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell$ il y a des isomorphismes dans la catégorie dérivée $\mathrm{GL}_n(F) \times D^\times \times W_F$ -équivariante-lisse

$$\begin{aligned} \varinjlim_K R\Gamma_c(\mathcal{M}_K, \Lambda) &\simeq \varinjlim_{A,K} R\Gamma_c(U_{A,K}, \Lambda) \\ \varinjlim_K R\Gamma_c(\mathcal{M}_K, \Lambda) &\simeq \varinjlim_{A,K} R\Gamma_c(X_{\bullet, A, K}, \Lambda) \end{aligned}$$

où $X_{\bullet, A, K}$ désigne le diagramme d'espaces rigides de type le diagramme des facettes orientées $a_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_d$ défini précédemment (remarque 7.3)(cf. thèse Illusie tome II pour la cohomologie des diagrammes de topos, ici la cohomologie à support compact désignant la cohomologie de $j_! \Lambda$ où j désigne l'inclusion de $X_{\bullet, A, K}$ dans le diagramme compactifié universel d'espaces adiques construit par Huber ([19] théorème 5.1.5).

Remarque 7.5. — La deuxième égalité dans le corollaire précédent fournit des résolutions équivariantes de la cohomologie à support compact de la tour de Lubin-Tate par des induites compactes de la cohomologie des cellules et de leur bord.

8. Modèles entiers des cellules

8.1. Niveau fini. —

8.1.1. Préliminaires. — Rappelons qu'un $\check{\mathcal{O}}$ -schéma formel admissible est un $\check{\mathcal{O}}$ -schéma formel quasi-séparé de type fini sans π -torsion.

Proposition 8.1. — Soient \mathfrak{X} un $\check{\mathcal{O}}$ -schéma formel admissible normal (cf. appendice A.2) et G un groupe p -divisible sur \mathfrak{X} muni d'une action de \mathcal{O} . Soient Λ un \mathcal{O} -module libre de rang n , $X_K \rightarrow \mathfrak{X}^{rig}$ l'espace classifiant des structures de niveau K

$$\eta : \Lambda \xrightarrow{\sim} T_p(G^{rig})[K]$$

et \mathfrak{X}_K la normalisation de \mathfrak{X} dans X_K (cf. appendice A.3). Alors, \mathfrak{X}_K représente le foncteur F défini sur la catégorie des $\check{\mathcal{O}}$ -schémas formels admissibles normaux au dessus de \mathfrak{X} défini par $\forall \mathfrak{Z} \xrightarrow{f} \mathfrak{X}$

$$F(\mathfrak{Z}) = \{ \text{structures de niveau } K \text{ rel. à } \Lambda \text{ sur } (f^*G)^{rig} / \mathfrak{Z}^{rig} \}$$

Démonstration. C'est une conséquence de la propriété universelle du normalisé, cf. l'appendice A.3. \square

Remarque 8.2. — Si G est un groupe de Lubin-Tate et $K \subset \mathrm{Id} + \pi^k \mathrm{End}(\Lambda)$ alors sur \mathfrak{X}_K le groupe G est muni d'une structure de niveau de Drinfeld de niveau k . C'est une conséquence du fait que l'espace classifiant des structures de Drinfeld de niveau k est fini au dessus de \mathfrak{X} , a même fibre générique que \mathfrak{X}_K (en fibre générique toutes les définitions des structures de niveau coïncident) et est donc en dessous du normalisé.

Proposition 8.3. — Soit \mathcal{P} un polygone de Newton i.e. la donnée pour i entre 1 et $n-1$ de nombres rationnels α_i , $0 < \alpha_i < 1$, tels que le polygone commençant en $(0,1)$, passant par les (q^i, α_i) et finissant en $(q^n, 0)$ soit convexe. Le foncteur défini sur la catégorie des $\check{\mathcal{O}}$ -schémas formels admissibles normaux qui à \mathfrak{Z} associe l'ensemble des classes d'isomorphismes de couples (H, ρ) où H est un \mathcal{O} -module formel et

$$\rho : \mathbb{H} \times_{\mathbb{F}_q} \mathfrak{Z} \bmod p \longrightarrow H \bmod p$$

une quasi-isogénie de degré 0 tels que

$$\forall z \in \mathfrak{Z}^{rig} \quad \text{Newt}(H[\pi]_z) \geq \mathcal{P}$$

est représentable.

Démonstration. Soit $\mathfrak{X} = \text{Spf}(\check{\mathcal{O}}[[x_1, \dots, x_{n-1}]])$ l'espace de Lubin-Tate. Pour $\underline{x} \in \mathfrak{X}^{rig}$

$$\text{Newt}([\pi]_{F_{\underline{x}}}) \geq \mathcal{P} \Leftrightarrow \forall i \ v(x_i) \geq \alpha_i$$

Si $\alpha_i = \frac{a_i}{b_i}$ où $a_i, b_i \in \mathbb{N}$ soit

$$\mathfrak{Y} = \text{Spf}(\check{\mathcal{O}} \langle x_1, \dots, x_{n-1}, T_1, \dots, T_{n-1} \rangle / (x_i^{b_i} - \pi^{a_i} T_i)_i)$$

Alors $\mathfrak{Y}^{\text{normalisé}}$ convient. En effet, si \mathfrak{Z} est normal et (H, ρ) est définie sur \mathfrak{Z} $\exists ! f : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$ tel que

$$(H, \rho) = f^*(H^{univ}, \rho^{univ})$$

Si de plus $\forall z \in \mathfrak{Z}^{rig} \quad \text{Newt}(H[\pi]_z) \geq \mathcal{P}$ alors

$$\begin{aligned} \forall i \ \forall z \in \mathfrak{Z}^{rig} \quad \frac{|f^* x_i^{b_i}(z)|}{\pi^{a_i}} &\leq 1 \\ \implies \frac{f^* x_i^{b_i}}{\pi^{a_i}} &\in \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}} \end{aligned}$$

puisque \mathfrak{Z} est normal (cf. appendice A.2). Et donc $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$ se factorise en

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{Y}^{\text{normalisé}} & \\ & \downarrow & \\ \mathfrak{Z} & \xrightarrow{\quad} \mathfrak{Y} & \downarrow \\ & \searrow & \mathfrak{X} \end{array}$$

(La flèche $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{Y}^{\text{normalisé}}$ est en pointillés et étiquetée $\exists !$)

où la flèche en pointillés résulte de ce que \mathfrak{Z} est normal. □

8.1.2. Modèles entiers des cellules $\mathcal{D}_{[\Lambda, M], K}$. —

Proposition 8.4. — Soit (Λ, M) dans l'immeuble de $GL_n \times D^\times$. Soit $K \subset GL(\Lambda)$ un sous-groupe compact ouvert. Le foncteur qui à un $\check{\mathcal{O}}$ -schéma formel admissible normal \mathfrak{Z} associe les classes d'isomorphisme de triplets (H, ρ, η) où H est un \mathcal{O} -module formel sur \mathfrak{Z} , ρ une rigidification de degré $[M : \mathcal{O}_D]$ et η une structure de niveau K relativement à Λ sur $T_p(H^{rig})$ tels que

$$\forall z \in \mathfrak{Z}^{rig} \quad \text{Newt}(H[\pi]_z) \geq \text{le polygone de Gross-Hopkins}$$

est représentable. De plus il ne dépend canoniquement que de la classe $[\Lambda, M]$ dans \mathcal{I} .

Démonstration. C'est une conséquence des deux propositions précédentes, puisque quitte à translater par une puissance de Π on peut supposer que la rigidification est de degré 0.

Quant à la dernière assertion, il suffit de constater que l'application naturelle $(H, \rho, \eta) \mapsto (H/H[\pi], \rho \circ h, h_* \circ \eta)$ où $h : H \rightarrow H/H[\pi]$ induit un isomorphisme canonique entre le foncteur associé à (Λ, M) et celui associé à $(\pi^{-1}\Lambda, \pi M)$. □

Définition 8.5. — On note $\mathbb{D}_{[\Lambda, M], K}$ le $\check{\mathcal{O}}$ -schéma formel admissible normal défini dans la proposition précédente.

Il y a des isomorphismes naturels

$$\forall (g, d) \in \mathrm{GL}_n(F) \times D^\times \quad g \times d : \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{[g^{-1}\Lambda, d.M], g^{-1}Kg}$$

via

$$(H, \rho, \eta) \longmapsto (H, \rho \circ d^{-1}, \eta \circ g)$$

Remarque 8.6. — On peut calculer explicitement $\mathbb{D}_{[\Lambda, M], GL(\Lambda)}$. Il s'agit de

$$\mathrm{Spf}(\check{\mathcal{O}} < x_1, \dots, x_{n-1}, T_1, \dots, T_{n-1} > / (x_i^n - \pi^{n-i} T_i))^{\mathrm{normalisé}}$$

L'algèbre le définissant est engendrée par l'algèbre $\check{\mathcal{O}} < x_1, \dots, x_{n-1}, T_1, \dots, T_{n-1} > / (x_i^n - \pi^{n-i} T_i)$ à laquelle on a rajoutée les

$$\frac{x_i^{\lceil \frac{n}{n-i} \rceil}}{\pi}, \frac{x_i^{\lceil 2 \frac{n}{n-i} \rceil}}{\pi^2}, \dots, \frac{x_i^{\frac{n}{n \wedge i}}}{\pi^{\frac{n-i}{n \wedge i}}}$$

Il est de la forme \overline{T}_λ (avec les notations de [8]) où \overline{T} est la variété torique formelle (le complété π -adique d'une variété torique sur $\check{\mathcal{O}}$)

$$\overline{T} = \mathrm{Spf}(\check{\mathcal{O}} < x_i, T_i, Z > / (x_i^n - Z^{n-i} T_i))^{\mathrm{normalisé}}$$

avec $\lambda = Z$, $\overline{T}_\lambda = V(\lambda - \pi)$.

8.1.3. *Bord des cellules.* —

Proposition 8.7. — Pour i un entier vérifiant $1 \leq i \leq n-1$ on note

$$\partial_i \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K} \hookrightarrow \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K}$$

le sous-foncteur de $\mathbb{D}_{[\Lambda, M], K}$ défini par l'ensemble des (H, ρ, η) tels que pour tout $z \in \mathfrak{Z}^{rig}$ le polygone $\mathrm{Newt}(H[\pi]_z)$ passe par le point $(q^i, 1 - \frac{i}{n})$. Ce sous-foncteur est un ouvert de $\mathbb{D}_{[\Lambda, M], K}$.

Démonstration. Avec les coordonnées explicites choisies sur les espaces de Lubin-Tate dans la démonstration de la proposition 8.3, celui-ci est défini par l'inégalité $v(x_i) \geq 1 - \frac{i}{n}$ sur l'espace rigide et est donc l'ouvert $T_i \neq 0$ avec les notations de la proposition 8.3. \square

Remarque 8.8. — Bien sûr cet ouvert est obtenu par image réciproque de son homologue en niveau $K = \mathrm{GL}(\Lambda)$.

8.1.4. *Décomposition du bord.* —

Lemme 8.9. — Soit \mathfrak{X} un schéma formel admissible quasicompact normal tel que

$$\mathfrak{X}^{rig} = U_1 \coprod U_2$$

Il existe alors des modèles entiers $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ de U_1 et U_2 tels que

$$\mathfrak{X} = \mathcal{U}_1 \coprod \mathcal{U}_2$$

Démonstration. Le schéma formel \mathfrak{X} étant admissible

$$\Gamma(\mathfrak{X}^{rig}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{rig}}) = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \left[\frac{1}{\pi} \right]$$

et donc la fonction rigide valant 0 sur U_1 et 1 sur U_2 définit un élément e de $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \left[\frac{1}{\pi} \right]$ vérifiant $e^2 = e$. Mais \mathfrak{X} étant normal $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ est intégralement fermé dans $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \left[\frac{1}{\pi} \right]$ (Fait 5 de l'appendice A). Donc $e \in \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$. \square

Corollaire 8.10. — Si $K \subset \mathrm{Id} + \pi \mathrm{End}(\Lambda)$ il y a une décomposition

$$\partial_i \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K} = \coprod_{E \subset \pi^{-1}\Lambda/\Lambda} \partial_{i,E} \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K}$$

où $\partial_{i,E} \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K}$ représente les (H, ρ, η) dans $\partial_i \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K}$ tels qu'en tout point de la fibre générique $\eta(E)$ soit le sous-groupe des q^i -points de plus grande valuation dans $H[\pi]$.

Remarque 8.11. — Plus généralement, soit $\underline{i} = (0 < i_1 < \dots < i_r < n)$ et $\partial_{\underline{i}} \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K} = \bigcap_{a=1}^r \partial_{i_a} \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K}$. Alors,

$$\partial_{\underline{i}} \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K} = \coprod_{E^\bullet} \partial_{\underline{i}, E^\bullet} \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K}$$

où E^\bullet parcourt les drapeaux de \mathbb{F}_q -e.v. dans $\pi^{-1}\Lambda/\Lambda$ de “type” \underline{i} (i.e. $E^1 \subset \dots \subset E^r$ avec $\dim_{\mathbb{F}_q} E^a = i_a$) qui correspondent via η à des drapeaux de sous-groupes canoniques dans $H[\pi]$.

8.1.5. *Applications de recollement.* —

Proposition 8.12. — Soient $[\Lambda, M] \in \mathcal{I}$ et $E \subset \pi^{-1}\Lambda/\Lambda$ de dimension i . Si $p : \pi^{-1}\Lambda \rightarrow \pi^{-1}\Lambda/\Lambda$, si

$$K \subset (\text{Id} + \pi \text{End}(\Lambda)) \cap (\text{Id} + \pi \text{End}(p^{-1}(E)))$$

il y a un isomorphisme

$$\partial_{i, E} \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K} \xrightarrow{\sim} \partial_{n-i, (\pi^{-1}\Lambda/\Lambda)/E} \mathbb{D}_{[p^{-1}(E), \Pi^i M], K}$$

induit par le quotient par $\eta(E)$.

Démonstration. D’après la remarque 8.2, sur $\mathbb{D}_{[\Lambda, M], K}$ le \mathcal{O} -module formel universel H possède une structure de niveau de Drinfeld de niveau 1 étendant la structure de niveau η sur la fibre générique. Il résulte alors du lemme 6.4 qu’il existe un unique sous-groupe plat fini $\eta(E) \subset H[\pi]$ induisant ponctuellement sur $\partial_{i, E}$ en chaque point de la fibre générique le sous-groupe des q^i -points de plus grande valuation dans $H[\pi]$.

D’après les calculs effectués dans la première partie de la démonstration de la proposition 3.5 on vérifie que $H/\eta(E)$ est dans ∂_{n-i} et qu’en chaque point de la fibre générique l’image par l’isogénie $h : H \rightarrow H/\eta(E)$ envoie un facteur direct de $\eta(E)$ dans $H[\pi]$ sur les q^{n-i} -points de plus grande valuation. On en déduit aussitôt que $(H/\eta(E), h \circ \rho, h_* \circ \eta)$ définit un élément de $\partial_{n-i, (\pi^{-1}\Lambda/\Lambda)/E} \mathbb{D}_{[p^{-1}(E), \Pi^i M], K}$. Cela définit le morphisme

$$\partial_{i, E} \mathbb{D}_{[\Lambda, M], K} \longrightarrow \partial_{n-i, (\pi^{-1}\Lambda/\Lambda)/E} \mathbb{D}_{[p^{-1}(E), \Pi^i M], K}$$

Mais en remplaçant E par $(\pi^{-1}\Lambda/\Lambda)/E$ on obtient un morphisme dans l’autre sens. La composée des deux est le quotient par $H[\pi]$ qui est donc l’identité. \square

8.1.6. *Réinterprétation en termes des arêtes orientées de \mathcal{I} .* —

Définition 8.13. — Soit $a \rightarrow a'$ une arête de \mathcal{I} où $a = [\Lambda, M]$, $a' = [\Lambda', M']$ et

$$\Lambda \subsetneq \Lambda' \subsetneq \pi^{-1}\Lambda \quad M' = \Pi^{[\Lambda:\Lambda']} M$$

Soit $K \subset \text{Id} + \pi \text{End}(\Lambda) \cap \text{Id} + \pi \text{End}(\Lambda')$. On note

$$\mathbb{D}_{a \rightarrow a', K} = \partial_{i, \Lambda'/\Lambda} \mathbb{D}_{a, K}$$

D’après la proposition 8.12 il y a un isomorphisme naturel

$$\mathbb{D}_{a \rightarrow a', K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{a' \rightarrow a, K}$$

d’où deux immersions ouvertes

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{D}_{a, K} \\ & \nearrow & \\ \mathbb{D}_{a \rightarrow a', K} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathbb{D}_{a', K} \end{array}$$

Ces applications de face sont équivariantes pour l’action de $\text{GL}_n(F) \times D^\times$.

Remarque 8.14. — Plus généralement soit

$$a_0 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_r$$

un simplexe orienté de \mathcal{I} . Mettons le sous la forme $a_i = [\Lambda_i, M_i]$ où

$$\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \dots \subset \Lambda_r \subset \pi^{-1}\Lambda$$

et $M_i = \Pi^{[\Lambda_0:\Lambda_i]}M_0$. Cela définit un type \underline{i} avec $i_a = \dim_{\mathbb{F}_q} \Lambda_i/\Lambda_0$ et un drapeau E^\bullet de type \underline{i} dans $\pi^{-1}\Lambda_0/\Lambda_0$.

Posons

$$\mathbb{D}_{a_0 \rightarrow \dots \rightarrow a_r, K} = \partial_{\underline{i}, E^\bullet} \mathbb{D}_{[\Lambda_0, M_0], K}$$

Alors, pour tout i compris entre 1 et r il y a des isomorphismes

$$\mathbb{D}_{a_0 \rightarrow \dots \rightarrow a_r, K} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{a_i \rightarrow \dots \rightarrow a_r \rightarrow a_0 \rightarrow \dots \rightarrow a_{i-1}, K}$$

qui se composent de façon naturelle. Il y a également des applications de face naturelles : pour tout simplexe orienté σ et tout sous-simplexe $\sigma' \subset \sigma$:

$$\mathbb{D}_{\sigma, K} \hookrightarrow \mathbb{D}_{\sigma', K}$$

Ces applications sont des immersions ouvertes.

8.2. Niveau infini. —

Définition 8.15. — Soit $a \in \mathcal{I}$. On pose

$$\mathbb{D}_{a, \infty} = \varprojlim_K \mathbb{D}_{a, K}$$

(K suffisamment petit) dans la catégorie des schémas formels p -adiques.

Étant donné que les morphismes de transition $\mathbb{D}_{a, K_2} \rightarrow \mathbb{D}_{a, K_1}$ pour $K_2 \subset K_1$ sont affines une telle limite existe. Si $\mathbb{D}_{a, K} = \mathrm{Spf}(A_K)$ alors

$$\mathbb{D}_{a, \infty} = \mathrm{Spf} \left(\left(\varinjlim_K A_K \right)^\wedge \right)$$

Remarque 8.16. — Si $\mathcal{A}_K = A_K[\frac{1}{\pi}]$ est l'algèbre de Banach affinoïde p -adique munie de sa norme infini $|f|_\infty = \sup_{x \in \mathrm{Max}(\mathcal{A}_K)} |f(x)|$, soit $\mathcal{A} = \bigcup_K \mathcal{A}_K$ munie de la norme infini

$$|f|_\infty = \sup_{x: \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}} |f(x)|$$

(les morphismes de transition $sp(\mathcal{A}_K) \rightarrow sp(\mathcal{A}_{K'})$ pour $K' \subset K$ étant finis l'inclusion $\mathcal{A}_K \subset \mathcal{A}_{K'}$ est isométrique). Soit $\hat{\mathcal{A}}$ le complété de \mathcal{A} , une algèbre de Banach p -adique. Alors, d'après le fait 6 de l'appendice A

$$\mathbb{D}_{a, \infty} = \mathrm{Spf}(\text{boule unité de } \hat{\mathcal{A}})$$

Définition 8.17. — Pour σ un simplexe orienté de \mathcal{I} , $\sigma = (a \rightarrow \dots)$ on définit $\mathbb{D}_{\sigma, \infty}$ comme étant l'ouvert correspondant de $\mathbb{D}_{a, \infty}$.

On a donc $\mathbb{D}_{\sigma, \infty} = \varprojlim_K \mathbb{D}_{\sigma, K}$. Ceux-ci sont munis d'une action

$$\forall (g, d) \in \mathrm{GL}_n(F) \times D^\times \quad \mathbb{D}_{\sigma, \infty} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{(g, d). \sigma, \infty}$$

et d'applications de face

$$\mathbb{D}_{\sigma, \infty} \hookrightarrow \mathbb{D}_{\sigma', \infty}$$

pour $\sigma' \subset \sigma$ des simplexes orientés.

8.3. Donnée de descente. — La donnée de descente de Rapoport-Zink permet de définir des données pour tout simplexe orienté σ_0 pour tout K (éventuellement $K = \infty$)

$$\mathbb{D}_{\sigma_0, K} \longrightarrow \mathbb{D}_{\Pi^{-1} \cdot \sigma_0, K}^{(\sigma)}$$

où σ désigne le Frobenius arithmétique de $\widehat{F^{nr}}|F$.

9. Le schéma formel recollé en niveau fini

Soit $A \subset \mathcal{I}$ un sous-ensemble comme dans la partie 7. Posons

$$\mathfrak{X}_{0,A} = \coprod_{a \in A} \mathbb{D}_{a,K}$$

et

$$\mathfrak{X}_{1,A} = \coprod_{\substack{a, a' \in A \\ a \rightarrow a'}} \mathbb{D}_{a \rightarrow a', K}$$

La section 8.1.6 permet de définir un diagramme

$$\mathfrak{X}_{1,A,K} \rightrightarrows \mathfrak{X}_{0,A,K}$$

Proposition 9.1. — *Le diagramme ci dessus définit une donnée de recollement effective pour la topologie de Zariski et définit donc un schéma formel $\mathfrak{X}_{A,K}$ localement de type fini sur $\check{\mathcal{O}}$ tel que $\mathfrak{X}_{A,K}/\pi^{\mathbb{Z}}$ soit de type fini. Ce schéma formel est un modèle entier de l'ouvert rigide $U_{A,K}$ de \mathcal{M}_K défini dans la proposition 7.1. Comme dans le cas rigide tout est équivariant sous $GL_n(F) \times D^\times$ pour des A et K variants.*

Démonstration. C'est une conséquence de ce que les applications de bord sont naturelles au sens où le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}_{a \rightarrow a' \rightarrow a'', K} & \longrightarrow & \mathbb{D}_{a \rightarrow a'', K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{D}_{a' \rightarrow a'', K} & \longrightarrow & \mathbb{D}_{a'', K} \end{array}$$

(ce qui n'est rien d'autre que l'égalité $(H/\eta(E''))/(\eta(E')/\eta(E'')) = H/\eta(E')$). □

10. Le schéma formel en niveau infini

Proposition 10.1. — *Le diagramme $GL_n(F) \times D^\times$ -équivariant*

$$\coprod_{a \rightarrow a'} \mathbb{D}_{a \rightarrow a', \infty} \rightrightarrows \coprod_a \mathbb{D}_{a, \infty}$$

définit un schéma formel p -adique recollé \mathfrak{X}_∞ muni d'une action de $GL_n(F) \times D^\times$. De plus

$$\mathfrak{X}_\infty = \varinjlim_A \varprojlim_K \mathfrak{X}_{A,K}$$

Ce schéma formel est muni d'une donnée de descente de $\check{\mathcal{O}}$ à \mathcal{O} qui est effective sur les quotients $\mathfrak{X}_\infty/\pi^{a\mathbb{Z}}$ pour $a \in \mathbb{N}^$.*

Démonstration. Elle ne pose pas de problème. □

Remarque 10.2. — Soit $\ell \neq p$ et $\Lambda \in \{\mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_\ell\}$. Soit $R\Gamma_c(-, \Lambda)$ un foncteur défini sur la catégorie des $\check{\mathcal{O}}$ -schémas formels p -adiques quasi-séparés sans p -torsion et à valeurs dans $\mathbb{D}^+(\Lambda)$. Supposons que :

- En restriction à la catégorie des $\check{\mathcal{O}}$ -schémas formels de type fini ce foncteur coïncide avec le foncteur $\mathfrak{X} \mapsto R\Gamma_c(\mathfrak{X}^{an} \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \Lambda)$ où \mathfrak{X}^{an} désigne la fibre générique au sens des espaces de Berkovich et la cohomologie est la cohomologie étale de torsion ou bien ℓ -adique.

- Si $\mathfrak{X} = \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{X}_i$ où $\mathfrak{X}_i \longrightarrow \mathfrak{X}_{i+1}$ est fini alors

$$\varinjlim_{i \in \mathbb{N}} R\Gamma_c(\mathfrak{X}_i, \Lambda) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(\mathfrak{X}, \Lambda)$$

Alors

$$R\Gamma_c(\mathfrak{X}_\infty, \Lambda) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_K R\Gamma_c(\mathcal{M}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \Lambda)$$

Dans [12] nous construisons un tel foncteur (et ses versions équivariantes). La condition de compatibilité aux limites projectives sera une conséquence du théorème d'approximation d'Elkik. Cela nous permet de comparer la cohomologie des tours de Lubin-Tate et de Drinfeld.

11. Décomposition cellulaire écrasée en niveau fini

Dans la section 7 on a défini pour un niveau K une décomposition cellulaire d'un ouvert admissible de \mathcal{M}_K d'image quasi-compacte dans $\mathcal{M}_K/\pi^\mathbb{Z}$. On explique ici que quitte à modifier les cellules on a une décomposition cellulaire de tout \mathcal{M}_K paramétrée par un quotient de l'immeuble et des cellules modifiées.

Définition 11.1 (Cellules écrasées). — Soit σ un simplexe orienté de \mathcal{I} comme précédemment et $K \subset \mathrm{GL}_n(F)$ un sous-groupe compact ouvert. Soit $K' \triangleleft K$ compact ouvert tel que si $a = [\Lambda, M]$ est un sommet de σ alors $K' \subset \mathrm{Id} + \pi \mathrm{End}(\Lambda)$. Posons

$$\mathcal{D}_{\sigma, K} = \mathcal{D}_{\sigma, K'} / \mathrm{Stab}_K(\sigma)$$

où $\mathrm{Stab}_K(\sigma)$ désigne l'intersection des stabilisateurs des sommets de σ .

Ce quotient est bien défini car $\mathrm{Stab}_K(\sigma)/K'$ est un groupe fini. On a alors une décomposition cellulaire :

$$\coprod_{\{a \rightarrow a'\}/K} \mathcal{D}_{a \rightarrow a', K} \xrightarrow{\longrightarrow} \coprod_{a \in \mathcal{I}/K} \mathcal{D}_{a, K} \longrightarrow \mathcal{M}_K$$

Remarque 11.2. — Pour tout K il existe $n-1$ sous-ensembles K -stables $(U_{i, K})_{1 \leq i \leq n-1}$ dans $\mathcal{I}/\pi^\mathbb{Z}$ tels que

- $\mathcal{I}/\pi^\mathbb{Z} \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq n-1} U_{i, K}$ est relativement compact dans $\mathcal{I}/\pi^\mathbb{Z}$
- Si pour $1 \leq i \leq n-1$ P_i désigne le sous-groupe parabolique maximal dans GL_n stabilisateur de $F^i \oplus (0)^{n-i}$ alors

$$\pi_0(U_{i, K}/K) \simeq P_i(F) \backslash \mathrm{GL}_n(F)/K \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

On en déduit qu'il existe des ouverts admissibles $(V_{i, K})_{1 \leq i \leq n-1}$ dans $\mathcal{M}/\pi^\mathbb{Z}$ tels que $(\bigcup_i V_{i, K})^c$ est relativement compact (i.e. contenu dans une boule de rayon < 1) et dont l'image réciproque en niveau K se scinde en une union disjointe indexée par $P_i(F) \backslash \mathrm{GL}_n(F)/K$ i.e. est "induite parabolique". On peut donner une interprétation de ce phénomène en termes de sous-groupes canoniques.

Appendice A

Normalisé d'un schéma formel dans une extension de sa fibre générique

Dans cet appendice K désigne un corps valué complet non-archimédien. Tous les espaces rigides considérés sont quasi-séparés et définis sur K . Par point de X on entend ici les points classiques c'est à dire ceux associés aux spectres maximaux des algèbres affinoïdes (mais tous les résultats énoncés restent valable en considérant plus généralement les points au sens de Berkovich).

A.1. Généralités sur les espaces rigides. — Nous commençons par collecter quelques résultats difficilement disponibles dans la littérature sur les espaces rigides en donnant quelques indications sur les démonstrations dans certains cas. Nous n'auront pas besoin de tout ces énoncés dans la suite, néanmoins ils répondent à des questions qui sont venues naturellement à l'esprit de l'auteur lors de la rédaction des énoncés concernant la normalisation des schémas formels.

Fait 1. — *Soit X un espace rigide. Sont équivalents*

- $\forall x \in X$ l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est réduit
- Il existe un recouvrement admissible affinoïde $(U_i)_i$ de X tel que $\forall i$ l'anneau $\mathcal{O}_X(U_i)$ soit réduit
- Pour tout ouvert admissible U de X l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est réduit

Si l'une des trois conditions précédentes est vérifiée X est dit réduit. En général le faisceau qui à U ouvert admissible quasicompact associe l'idéal des éléments nilpotents dans $\mathcal{O}_X(U)$ est cohérent et définit un sous-espace rigide Zariski fermé réduit X_{red} dans X .

Fait 2. — *Soit X un espace rigide réduit. Sont équivalents*

- $\forall x \in X$ l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre
- Il existe un recouvrement admissible affinoïde $(U_i)_i$ de X tel que $\forall i \forall x \in U_i$ l'anneau $\mathcal{O}_X(U_i)_{\mathfrak{m}_x}$ est intègre unibranche.
- Pour tout ouvert admissible connexe U de X l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est intègre et si de plus U est affinoïde $\forall \mathfrak{P} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_X(U))$ l'anneau $\mathcal{O}_X(U)_{\mathfrak{P}}$ est unibranche.

Si ces conditions sont vérifiées X sera dit localement intègre.

Démonstration. On utilise librement les propriétés de base concernant les anneaux locaux des espaces rigides telles que dans le chapitre 2.1 de [1]. Soient $x \in X$, U un ouvert admissible affinoïde contenant x , $\mathcal{A} = \mathcal{O}_X(U)$ et \mathfrak{m} l'idéal de \mathcal{A} associé à x . Il y a un isomorphisme entre anneaux locaux noethériens

$$\widehat{\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}} \simeq \widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$$

L'anneau \mathcal{A} est réduit excellent ([20] ou [27]). On en déduit (EGA IV 7.8.3 (vii)) que $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}$ est intègre unibranche ssi $\widehat{\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}}$ est intègre. Puisque $\mathcal{O}_{X,x} \subset \widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$ la seconde assertion de l'énoncé entraîne la première. La troisième entraînant clairement la seconde il suffit de voir que la première implique la troisième. Il suffit alors de montrer que $\mathcal{O}_{X,x}$ intègre implique $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}}$ intègre unibranche (dans la troisième assertion \mathfrak{m} n'est pas supposé maximal, mais on peut s'y ramener puisque \mathcal{A} étant excellent l'ensemble des points de $\text{Spec}(\mathcal{A})$ où il est unibranche est constructible (EGA IV 9.7.10) et \mathcal{A} est un anneau de Jacobson). Si l'on savait que $\mathcal{O}_{X,x}$ est excellent cela serait facile car $\mathcal{O}_{X,x}$ étant hensélien il est unibranche et donc son complété serait intègre. Malheureusement cela n'est pas connu. Le lemme qui suit appliqué à $\mathcal{A}_{\mathfrak{m}} \subset \mathcal{O}_{X,x}$ permet néanmoins de conclure. \square

Lemme A.1. — *Soit $(A, \mathfrak{m}) \rightarrow (B, \mathfrak{n})$ un morphisme local injectif d'anneaux locaux. Supposons (B, \mathfrak{n}) hensélien intègre. Alors (A, \mathfrak{m}) est unibranche.*

Démonstration. La démonstration est identique à celle de la proposition 18.6.12 de EGA IV. \square

Exemple A.2. — Si $X = \text{Spm}(\mathcal{A})$ avec $\mathcal{A} = K \langle x, y \rangle / (x^2 - y^2(1 - x))$, l'algèbre \mathcal{A} est intègre mais l'ouvert $|x| \leq |p|$ bien que connexe défini par l'algèbre $\mathcal{A} \langle \frac{x}{p} \rangle$ est tel que $\mathcal{A} \langle \frac{x}{p} \rangle$ n'est pas intègre puisque si $|x| \leq |p|$ alors $\sqrt{1 - x} = \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} (-1)^k x^k \in \mathcal{A} \langle \frac{x}{p} \rangle$ et donc $x^2 - y^2(1 - x) = (x - y\sqrt{1 - x})(x + y\sqrt{1 - x})$. Cela peut également se voir en disant que la cubique nodale n'est pas unibranche en sa singularité.

Dans l'énoncé suivant, un anneau nothérien est dit normal s'il est un produit (nécessairement fini) d'anneaux intègres intégralement fermés dans leur corps des fractions, ce qui est encore équivalent à dire que tous ses localisés en ses idéaux premiers sont intègres intégralement clos dans leur corps des fractions.

Fait 3. — *Soit X un espace rigide réduit. Sont équivalents*

- Il existe un recouvrement affinoïde admissible $(U_i)_i$ de X tel que $\forall i \mathcal{O}_X(U_i)$ est normal

- Pour tout ouvert admissible connexe U de X $\mathcal{O}_X(U)$ est intègre intégralement clos
- $\forall x \in X$ $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre intégralement clos dans son corps des fractions

Si ces conditions sont vérifiées l'espace X est dit normal.

Fait 4. — Soit X un espace rigide réduit. Le normalisé \tilde{X} de X est bien défini et le morphisme $\tilde{X} \rightarrow X$ est fini.

Par normalisé on entend ici un objet représentant le foncteur $\text{Hom}(-, X)$ restreint à la catégorie des espace rigides normaux.

Si $f : \tilde{X} \rightarrow X$, le faisceau $f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ est le normalisé de \mathcal{O}_X dans le faisceau des fonctions méromorphes \mathcal{M}_X . Ce faisceau des fonctions méromorphes est celui qui à U ouvert affinoïde associe le corps total des fractions de $\mathcal{O}_X(U)$. Plus précisément, utilisant que $\forall U$ affinoïde $\mathcal{O}_X(U)$ est excellent donc Japonais et que donc $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(U)$ est fini sur $\mathcal{O}_X(U)$ on en déduit que $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(U)$ est une algèbre de Tate. Le normalisé de \mathcal{O}_X dans \mathcal{M}_X est un faisceau cohérent qui définit donc un espace rigide affinoïde au dessus de X qui est \tilde{X} .

Remarque A.3. — Ainsi, X réduit est localement intègre ssi pour tout ouvert admissible connexe de X son image réciproque dans \tilde{X} est connexe.

Remarque A.4. — Pour un espace rigide X on peut définir les composantes irréductibles de X comme étant les images des composantes connexes du normalisé de X_{red} . Elles sont donc Zariski fermées puisque le morphisme de normalisation est fini. Si pour un ouvert admissible quasicompact U on note $\text{Irr}(U)$ l'ensemble de ses composantes irréductibles, Irr est un faisceau muni d'un épimorphisme $\text{Irr} \rightarrow \pi_0$ associé au morphisme $\mathbb{Z} \rightarrow f_*\mathbb{Z}$ où $f : \tilde{X} \rightarrow X$.

A.2. Schémas formels normaux. — Désormais K sera supposé de valuation discrète. Rappelons qu'un \mathcal{O}_K -schéma formel admissible est un \mathcal{O}_K -schéma formel de type fini sans π -torsion (où π est une uniformisante de K). On les supposera toujours quasi-séparés.

Fait 5. — Soit \mathfrak{X} un \mathcal{O}_K -schéma formel admissible. Sont équivalents

- Il existe un recouvrement ouvert affine $(\mathcal{U}_i)_i$ de \mathfrak{X} tel que $\forall i$ $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{U}_i)$ est normal
- $\forall \mathcal{U}$ ouvert affine connexe de X , $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{U})$ est intègre intégralement clos dans son corps des fractions
- $\forall x \in \mathfrak{X}$ $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},x}$ est intègre intégralement clos dans son corps des fractions

Démonstration. On utilise le fait suivant : $\forall \mathcal{U}$ ouvert affine dans \mathfrak{X} l'anneau $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{U})$ est excellent ([26] pour le cas d'égale caractéristique et [27] pour le cas d'inégale) et donc $\forall f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{U})$ l'anneau $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{U})[\frac{1}{f}]$ est excellent ce qui implique que s'il est normal alors son complété $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(D(f))$ est normal. A partir de là tout le reste est facile. \square

Remarque A.5. — Il n'existe pas en général de bonne notion de schéma formel réduit ou bien normal. On a en effet besoin d'utiliser des propriétés stables par complétion afin que si l'anneau A possède cette propriété, pour tout f dans A l'anneau $A < \frac{1}{f} >$ la possède aussi.

Fait 6. — Soit \mathfrak{X} un \mathcal{O}_K -schéma formel admissible réduit tel que \mathfrak{X}^{rig} soit normal. Soit $sp : (\mathfrak{X}^{rig}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{rig}}) \rightarrow (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ comme morphisme d'espaces annelés. Via la norme infini le faisceau $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{rig}}$ est un faisceau en K -ev. normés : $\forall f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{rig}}(U) |f|_{\infty} = \sup_{x \in U} |f(x)|$. On note $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{rig}}^0$ le sous-faisceau en \mathcal{O}_K -algèbres des $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{rig}}$ telles que $|f|_{\infty} \leq 1$. Alors le normalisé de \mathfrak{X} est bien défini égal à

$$Spf(sp_*\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{rig}}^0)$$

qui est un \mathcal{O}_K -schéma formel admissible normal fini au dessus de \mathfrak{X} .

Démonstration. Tout repose sur le théorème de Grauert Remmert qui assure que pour A une \mathcal{O}_K -algèbre admissible, $\mathcal{A} = A[\frac{1}{\pi}]$ l'algèbre de Tate associée, la boule unité de \mathcal{A} pour la semi-norme infini est une algèbre admissible finie sur A . Nous renvoyons pour cela à la discussion au début de la section 1 de [4]. \square

Fait 7. — Soit \mathcal{U} un ouvert affine de \mathfrak{X} et $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U})[\frac{1}{p}]^0$ telles que $\mathcal{O}_X(\mathcal{U})[\frac{1}{p}]^0 = \mathcal{O}_X(\mathcal{U})[f_1, \dots, f_n]$. Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $\forall i \ \pi^r f_i \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$. Alors, le normalisé de \mathcal{U} s'identifie à l'éclatement formel admissible de l'idéal ouvert $(\pi^r, \pi^r f_1, \dots, \pi^r f_n)$.

A.3. Normalisé dans une extension de la fibre générique. —

Fait 8. — Soit \mathfrak{X} un \mathcal{O}_K -schéma formel admissible réduit. Soit $\varphi : Y \rightarrow \mathfrak{X}^{rig}$ un morphisme fini d'espaces rigides tel que Y soit normal. Alors, le normalisé $\tilde{\mathfrak{X}}$ de \mathfrak{X} dans Y existe, est fini au dessus de \mathfrak{X} et est égal à

$$\mathrm{Spf}(sp_* \varphi_* \mathcal{O}_Y^0)$$

Il vérifie la propriété universelle suivante : étant donné un schéma formel normal \mathfrak{Z} muni d'un morphisme $\mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$ et d'un relèvement

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathfrak{Z}^{rig} & \longrightarrow & \mathfrak{X}^{rig} \end{array}$$

il existe un unique relèvement

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{\mathfrak{X}} \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathfrak{Z} & \longrightarrow & \mathfrak{X} \end{array}$$

tel qu'après passage à la fibre générique les deux diagrammes précédents soient compatibles.

Appendice B

Modules de Dieudonné et cristaux des \mathcal{O} -modules π -divisibles

Soit $F|\mathbb{Q}_p$ une extension de degré fini. On notera $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F$.

B.1. Un lemme sur les F -cristaux \mathcal{O} -équivariants. — Soit S un schéma sur lequel p est localement nilpotent et $\Sigma = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$. On considère le gros site cristallin $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ de [2] ou bien le gros site cristallin nilpotent $\mathrm{NCRIS}(S/\Sigma)$ ([2] chapitre 1).

Lemme B.1. — Soit \mathcal{E} un F -cristal (non-dégénéré) en $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ -modules localement libres de rang fini sur $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ ou $\mathrm{NCRIS}(S/\Sigma)$. Supposons \mathcal{E} muni d'une action de \mathcal{O} . Alors, \mathcal{E} est un $\mathcal{O}_{S/\Sigma} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}$ -module localement libre sur $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$.

Démonstration. Soit $(U \hookrightarrow T) \in \mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ (resp. $\mathrm{NCRIS}(S/\Sigma)$) et $x \in U$. Les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) $\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_{T,x}$ est libre en tant que $\mathcal{O}_{T,x} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F$ -module
- (ii) $\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)} \otimes_{\mathcal{O}_T} \overline{k(x)}$ est libre en tant que $\overline{k(x)} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F$ -module
- (iii) $\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)} \otimes_{\mathcal{O}_T} \overline{k(x)}$ est libre en tant que $\overline{k(x)} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F$ -module

L'équivalence entre (ii) et (iii) résulte de ce que $\overline{k(x)} \otimes \mathcal{O}_F$ est une $k(x) \otimes \mathcal{O}_F$ -algèbre fidèlement plate.

L'implication (i) \Rightarrow (ii) est claire, quant à (ii) \Rightarrow (i) elle résulte du lemme de Nakayama. En effet, si $\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(x)$ est un $k(x) \otimes \mathcal{O}_F$ -module libre soit

$$e_1, \dots, e_r \in \mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_{T,x}$$

un relèvement d'une $k(x) \otimes \mathcal{O}_F$ -base. Soit $(\epsilon_j)_j$ une base de \mathcal{O}_F comme \mathbb{Z}_p -module. Alors, d'après le lemme de Nakayama, $(\epsilon_i \epsilon_j)_{i,j}$ engendre $\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_{T,x}$ comme $\mathcal{O}_{T,x}$ -module. Mais

$$\mathrm{rg}_{\mathcal{O}_{T,x}} (\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_{T,x}) = \mathrm{rg}_{k(x)} (\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(x)) = [F : \mathbb{Q}_p] \mathrm{rg}_{k(x) \otimes \mathcal{O}_F} (\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(x))$$

La famille $(\epsilon_i \epsilon_j)_{i,j}$ est donc une $\mathcal{O}_{T,x}$ -base.

Montrons donc l'assertion (iii). Il y a des morphismes compatibles dans $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ (resp. $\mathrm{NCRIS}(S/\Sigma)$) pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(\overline{k(x)}) & \hookrightarrow & \mathrm{Spec}(W_n(\overline{k(x)})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \hookrightarrow & \mathrm{Spec}(W_n(\mathcal{O}_T)) \end{array}$$

La propriété de cristal implique donc que $\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)} \otimes_{\mathcal{O}_T} \overline{k(x)}$ est la réduction modulo p de

$$E = \varprojlim_n \mathcal{E}_{(\mathrm{Spec}(\overline{k(x)}) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(W_n(\overline{k(x)}))}$$

C'est un $W(\overline{k(x)})$ -module libre qui est en fait un $W(\overline{k(x)}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F$ -module muni d'une isogénie F -linéaire (ici F = Frobenius)

$$\varphi : E_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} E_{\mathbb{Q}}$$

qui commute à l'action de \mathcal{O}_F . Or

$$E = \bigoplus_{\tau: F^0 \hookrightarrow W(\overline{k(x)})_{\mathbb{Q}}} E_{\tau}$$

où E_{τ} est un $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_{F^0, \tau}} W(\overline{k(x)})$ -module libre. Le module E est donc libre sur $W(\overline{k(x)}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F$ ssi

$$\forall \tau, \tau' \quad \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_{F^0, \tau}} W(\overline{k(x)})} E_{\tau} = \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_{F^0, \tau'}} W(\overline{k(x)})} E_{\tau'}$$

Mais

$$\forall \tau \quad \varphi : E_{\tau} \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} E_{F\tau} \otimes \mathbb{Q}$$

□

Corollaire B.2. — Soit H un groupe p -divisible sur un schéma S sur lequel p est localement nilpotent. Supposons le muni d'une action de \mathcal{O} . Alors l'algèbre de Lie de l'extension vectorielle universelle de H est un $\mathcal{O}_S \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}$ -module localement libre.

Démonstration. C'est une conséquence de ce que cette algèbre de Lie est l'évaluation d'un des cristaux définis dans [22]. □

B.2. Structure du cristal de Messing d'un \mathcal{O} -module π -divisible. —

Définition B.3. — Un \mathcal{O} -module π -divisible sur un \mathcal{O} -schéma est un groupe p -divisible muni d'une action de \mathcal{O} qui induit l'action naturelle sur son algèbre de Lie.

Remarque B.4. — Soit H un groupe p -divisible muni d'une action de \mathcal{O} . Alors, $\forall n$ $H[\pi^n]$ est un groupe plat fini. En effet, $\pi : H \rightarrow H$ est une isogénie puisque $\pi^{e-1} \cdot \pi = \text{unité} \times \pi$. On peut ainsi donner une définition analogue à celle des groupes p -divisibles pour les groupes π -divisibles munis d'une action de \mathcal{O} en remplaçant p par π dans les définitions.

Soit S un \mathcal{O} -schéma sur lequel p est localement nilpotent. Soit H un \mathcal{O} -module π -divisible sur S . Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \omega_{H^D} \longrightarrow \mathrm{Lie} E(H) \longrightarrow \omega_H^* \longrightarrow 0$$

où $E(H)$ désigne l'extension vectorielle universelle de H de [22]. Soit I l'idéal d'augmentation de $\mathcal{O}_S \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_S$.

Proposition B.5. — Localement sur S il existe une $\mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_F$ -base de $\mathrm{Lie} E(H)$ $(e_1, \dots, e_{r_1+r_2})$ telle que

$$\omega_{H^D} = \mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_F \cdot e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_F \cdot e_{r_1} \oplus I \cdot e_{r_1+1} \oplus \dots \oplus I \cdot e_{r_1+r_2}$$

Démonstration. Il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \omega_{H^D}/ILieE(H) \longrightarrow LieE(H)/ILieE(H) \longrightarrow \omega_H^* \longrightarrow 0$$

où d'après le corollaire B.2 $LieE(H)/ILieE(H)$ est un \mathcal{O}_S -module localement libre. Localement sur S soit $(e_1, \dots, e_{r_1+r_2})$ un relèvement d'une base de $LieE(H)/ILieE(H)$ dans $LieE(H)$ tel que $(e_{r_1+1}, \dots, e_{r_1+r_2})$ s'envoie sur une base de ω_H^* via $LieE(H) \twoheadrightarrow \omega_H^*$ (une telle base existe puisque $LieE(H)/ILieE(H) \twoheadrightarrow \omega_H^*$ est localement scindé). L'idéal I étant contenu dans le radical de Jacobson de $\mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_F$ et $LieE(H)$ étant libre sur $\mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_F$, $(e_1, \dots, e_{r_1+r_2})$ est une $\mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_F$ -base de $LieE(H)$ dont on vérifie aussitôt qu'elle convient. \square

B.3. \mathcal{O} -extension vectorielle universelle d'un \mathcal{O} -module π -divisible. —

Définition B.6. — Soit S un schéma et \mathcal{F} un faisceau en groupe abéliens sur S_{fppf} . Soit $f : \text{Spec}(\mathcal{O}_S[\epsilon]) \rightarrow S$. On appelle algèbre de Lie de \mathcal{F} le faisceau en \mathcal{O}_S -modules sur S_{fppf}

$$Lie \mathcal{F} = \ker f_* f^* \mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon=0} \mathcal{F}$$

Définition B.7. — Soit H un \mathcal{O} -module π -divisible sur un schéma S . On appelle \mathcal{O} -extension vectorielle de H une extension

$$0 \longrightarrow \underline{V} \longrightarrow E \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

de faisceaux en \mathcal{O}_F -modules sur S_{fppf} telle que V soit un \mathcal{O}_S -module cohérent, \underline{V} le faisceau fppf associé et l'action induite de \mathcal{O} sur $Lie E$ soit l'action naturelle.

On remarquera que de telles extensions sont “rigides” puisque $\forall W$ cohérent $\text{Hom}(H, \underline{W}) = 0$ (p est localement nilpotent sur S) (par fainéantise on oubliera désormais de souligner les faisceaux cohérents et on notera V pour \underline{V}). La proposition suivante a donc un sens.

Proposition B.8. — *Tout \mathcal{O} -module π -divisible possède une \mathcal{O} -extension vectorielle universelle*

$$0 \longrightarrow V_{\mathcal{O}}(H) \longrightarrow E_{\mathcal{O}}(H) \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

De plus $V_{\mathcal{O}}(H)$ et $Lie E_{\mathcal{O}}(H)$ sont des \mathcal{O}_S -modules localement libres et il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow V_{\mathcal{O}}(H) \longrightarrow Lie E_{\mathcal{O}}(H) \longrightarrow Lie H \longrightarrow 0$$

Démonstration. Soit

$$0 \longrightarrow \omega_{H^D} \longrightarrow E(H) \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

L'extension vectorielle universelle de H (correspondant au cas $\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}_p$). Soit $I = \ker(\mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_F \twoheadrightarrow \mathcal{O}_S)$. Considérons le poussé en avant de l'extension précédente par le morphisme $\omega_{H^D} \twoheadrightarrow \omega_{H^D}/ILieE(H)$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \omega_{H^D} & \longrightarrow & E(H) & \longrightarrow & H \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \omega_{H^D}/ILieE(H) & \longrightarrow & \tilde{E} & \longrightarrow & H \longrightarrow 0 \end{array}$$

où

$$\tilde{E} = \omega_{H^D}/ILieE(H) \coprod_{\omega_{H^D}} E(H) = E(H)/ILieE(H)$$

Alors cette extension est une \mathcal{O} -extension vectorielle universelle de H . Avant de le montrer commençons par montrer quelques propriétés de cette extension.

D'après la proposition B.5 $\omega_{H^D}/ILieE(H)$ est localement libre. De plus, si \tilde{E}_n désigne l'image réciproque de $H[\pi^n]$ dans \tilde{E} , $\tilde{E} = \varinjlim_n \tilde{E}_n$ et il y a des suites exactes

$$0 \longrightarrow \omega_{H^D}/ILieE(H) \longrightarrow \tilde{E}_n \longrightarrow H[\pi^n] \longrightarrow 0$$

Donc, \tilde{E}_n est un toreur fppf sous l'espace affine $\omega_{H^D}/ILieE(H)$ au dessus de $H[\pi^n]$ et est donc représentable par un $H[\pi^n]$ -schéma lisse. Il y a donc des suites exactes pour tout n

$$0 \longrightarrow \omega_{H^D}/ILieE(H) \longrightarrow Lie \tilde{E}_n \longrightarrow Lie H[\pi^n] \longrightarrow 0$$

et étant donné que $\mathrm{Lie}\tilde{E} = \varinjlim_n \tilde{E}_n$, que pour $n \gg 0$ $\mathrm{Lie}H[\pi^n] = \mathrm{Lie}H$, pour $n \gg 0$ $\mathrm{Lie}\tilde{E}_n = \mathrm{Lie}\tilde{E}$ et il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \omega_{H^D}/I\mathrm{Lie}E(H) \longrightarrow \mathrm{Lie}\tilde{E} \longrightarrow \mathrm{Lie}H \longrightarrow 0$$

et même un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \omega_{H^D} & \longrightarrow & \mathrm{Lie}E(H) & \longrightarrow & \mathrm{Lie}H \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \omega_{H^D}/I\mathrm{Lie}E(H) & \longrightarrow & \mathrm{Lie}\tilde{E} & \longrightarrow & \mathrm{Lie}H \longrightarrow 0 \end{array}$$

duquel on déduit que

$$\mathrm{Lie}\tilde{E} = \mathrm{Lie}E(H)/I.\mathrm{Lie}E(H)$$

Montrons maintenant l'universalité de l'extension. Soit

$$0 \longrightarrow \underline{V} \longrightarrow E \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

une \mathcal{O} -extension vectorielle. Oubliant l'action de \mathcal{O} , celle-ci est induite par un unique morphisme \mathcal{O}_S -linéaire $\omega_{H^D} \longrightarrow V$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \omega_{H^D} & \longrightarrow & E(H) & \longrightarrow & H \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \underline{V} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & H \longrightarrow 0 \end{array}$$

l'unicité d'un tel morphisme (qui résulte de $\mathrm{Hom}(H, \underline{V}) = 0$) implique que tous les morphismes dans le diagramme précédent sont \mathcal{O} -linéaires. Il y a alors un diagramme de $\mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}$ -modules sur S_{fppf}

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \omega_{H^D} & \longrightarrow & \mathrm{Lie}E(H) & \longrightarrow & \mathrm{Lie}H \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \underline{V} & \longrightarrow & \mathrm{Lie}E & \longrightarrow & \mathrm{Lie}H \longrightarrow 0 \end{array}$$

duquel on déduit que $\omega_{H^D} \longrightarrow \underline{V}$ se factorise par $\omega_{H^D} \twoheadrightarrow \omega_{H^D}/I.\mathrm{Lie}E(H)$. \square

Remarque B.9. — Il résulte de la démonstration précédente que si l'on pose $\mathrm{ht}_{\mathcal{O}}H = \mathrm{ht} H/[F : \mathbb{Q}_p]$ alors

$$\mathrm{rg}_{\mathcal{O}_S} V_{\mathcal{O}}(H) = \mathrm{ht}_{\mathcal{O}}H - \dim H$$

Remarque B.10. — On vérifie comme dans le lemme 1.18 de [22] que $E_{\mathcal{O}}(H)$ est formellement lisse.

Remarque B.11. — Comme dans la proposition 1.19 du chapitre IV de [22] on vérifie que le complété formel (au sens de la section II.1.0 de [22]) $\hat{E}_{\mathcal{O}}(H)$ de $E_{\mathcal{O}}(H)$ est un \mathcal{O} -module formel (i.e. un groupe de Lie formel muni d'une action de \mathcal{O} telle que l'action induite sur l'algèbre de Lie soit l'action naturelle) extension du \mathcal{O} -module formel \hat{H} par le groupe formel vectoriel $\hat{V}_{\mathcal{O}}(H)$ (localement isomorphe à une somme finie de $\hat{\mathbb{G}}_a$).

B.4. Cristal de Messing généralisé et théorie de la déformation. —

Théorème B.12. — Soit $\Sigma = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F)$ muni de l'idéal à puissances divisées (p) et \mathcal{E} le cristal de Messing de H sur $\mathrm{NCRIS}(S/\Sigma)$ en tant que $\mathcal{O}_{S/\Sigma} \otimes \mathcal{O}_F$ -module. Soit $\mathcal{I} = \ker(\mathcal{O}_{S/\Sigma} \otimes \mathcal{O}_F \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{S/\Sigma})$.

Alors, $\mathcal{E}/\mathcal{I}\mathcal{E}$ est un cristal en $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ -modules localement libres de rang fini tel que $\forall (U \hookrightarrow T) \in \mathrm{NCRIS}(S/\Sigma)$ $\forall \tilde{H}$ un relèvement de $H \times_S U$ sur T comme \mathcal{O} -module π -divisible

$$(\mathcal{E}/\mathcal{I}\mathcal{E})_{(U \hookrightarrow T)}$$

s'identifie à l'algèbre de lie de $E_{\mathcal{O}}(\tilde{H})$, la \mathcal{O} -extension vectorielle universelle de \tilde{H} .

De plus, pour un tel relèvement \tilde{H} la partie vectorielle de $E_{\mathcal{O}}(\tilde{H})$, $V_{\mathcal{O}}(\tilde{H}) = \omega_{\tilde{H}^D}/I.Lie E_{\mathcal{O}}(\tilde{H})$ définit une filtration localement facteur direct dans $(\mathcal{E}/\mathcal{IE})_{(U \hookrightarrow T)}$ se réduisant modulo l'idéal de U dans T sur la partie vectorielle de $E_{\mathcal{O}}(H)$.

Cette correspondance définit une équivalence de catégories entre la catégorie des \mathcal{O} -modules π -divisibles sur T et celle des couples (H_0, Fil) où H_0 est un \mathcal{O} -module π -divisible sur U et Fil une filtration localement facteur direct dans l'évaluation du cristal précédent sur $U \hookrightarrow T$ se réduisant sur la partie vectorielle de $Lie E_{\mathcal{O}}(H_0)$.

Démonstration. Seule la vérification du fait que la correspondance évoquée est une équivalence de catégories reste à vérifier.

Elle se déduit du théorème de Messing (th. 1.6 chap. V de [22]) en remarquant que les filtrations localement facteur direct \mathcal{O} -stables Fil dans $\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)}$ et telles que l'action de \mathcal{O} sur $\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)}/\text{Fil}$ soit l'action naturelle sont en bijection via l'application

$$\text{Fil} \longmapsto \text{Fil}/\mathcal{I}_{(U \hookrightarrow T)}\mathcal{E}_{(U \hookrightarrow T)}$$

avec les filtrations localement facteur directe dans $(\mathcal{E}/\mathcal{IE})_{(U \hookrightarrow T)}$. \square

B.5. Exponentielle π -adique. —

B.5.1. \mathcal{O} -puissances divisées ([18] section 10, [9] section 7). — Soit T un \mathcal{O} -schéma sur lequel π est localement nilpotent et $J \subset \mathcal{O}_T$ un idéal cohérent.

Définition B.13. — Une structure de \mathcal{O} -puissance divisées sur J consiste en la donnée d'une application $\gamma : J \rightarrow J$ vérifiant

- (i) $\forall a \in \mathcal{O}_S \forall x \in J \quad \gamma(ax) = a^q \gamma(x)$
- (ii) $\forall x \in J \quad \pi \gamma(x) = x^q$
- (iii) $\forall x, y \in J \quad \gamma(x+y) = \gamma(x) + \gamma(y) + \sum_{0 < i < q} \alpha_i \gamma_i(x) \gamma_{q_i}(y)$ où $\alpha_i = \binom{q}{i} / \pi \in \mathcal{O}$

Remarque B.14. — Lorsque $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$, d'après la proposition A.1 de l'appendice de [3], on retrouve la définition des puissances divisées usuelles avec $\gamma = \gamma_p$. Par exemple, lorsque la base ne possède pas de p -torsion, $x \mapsto \frac{x^p}{p}$ permet de retrouver les $\frac{x^n}{n!}$ par composition et multiplication par des éléments de \mathbb{Z}_p . Plus précisément, $\gamma_{p^n} = \alpha_n \gamma^{o^n}$ où $\alpha_n \in \mathbb{Z}_p^\times$ et si $n = \sum_i a_i p^i$ où $0 \leq a_i \leq p-1$, $\gamma_n = \beta_n \prod_i \gamma_{p^i} \circ \gamma_{a_i}$ où $\beta_n \in \mathbb{Z}_p^\times$.

Remarque B.15. — L'élément π étant localement nilpotent l'existence d'une \mathcal{O} -P.D. structure sur un idéal implique que celui-ci est un nil-idéal.

Exemple B.16. — Si $J^2 = \pi J = 0$ une structure de \mathcal{O} -P.D. sur J est la même chose qu'un morphisme additif $Frob_q$ -linéaire $\gamma : J \rightarrow J$.

Définition B.17. — Si γ est une \mathcal{O} -P.D. structure sur J on pose comme dans [9]

$$\forall n \geq 1 \quad \delta_n(x) = \underbrace{(\gamma \circ \dots \circ \gamma)}_{n\text{-fois}}(x) \cdot \pi^{1+q+\dots+q^{n-1}-n}$$

et $\delta_0(x) = x$.

Ainsi, si la base est sans π -torsion $\delta_n(x) = \frac{x^{q^n}}{\pi^n}$. On note $J^{[n]}$ l'idéal engendré par les $\gamma^{o a_1}(x_1) \dots \gamma^{o a_k}(x_k)$ où $\sum_i q_i^{a_i} \geq n$ et on dit que γ est nilpotente si $J^{[n]} = 0$ pour $n \gg 0$. Lorsque $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$ on vérifie facilement que l'on retrouve la définition usuelle pour les idéaux $J^{[n]}$.

Lemme B.18. — Soit $T' \rightarrow T$ un morphisme plat et $J \subset \mathcal{O}_T$ muni de \mathcal{O} -P.D.. Alors celles-ci s'étendent de façon compatible à $J\mathcal{O}_{T'}$.

Démonstration. Procéder par exemple comme dans le lemme 1.8 p.80 de [22]. \square

Définition B.19. — Pour $\Sigma = \text{Spec}(\mathcal{O})$ et S un \mathcal{O} -schéma sur lequel π est localement nilpotent la définition des \mathcal{O} -P.D. et le lemme précédent permet de définir des sites cristallins $\text{CRIS}_{\mathcal{O}}(S/\Sigma)$ et $\text{NCRIS}_{\mathcal{O}}(S/\Sigma)$.

B.5.2. *Logarithme.* —

Lemme B.20. — *Supposons J muni de \mathcal{O} -P.D.. Il y a alors un isomorphisme de \mathcal{O} -modules*

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{O}}(J) &\xrightarrow{\sim} J^{\mathbb{N}} \\ [x_i]_i &\longmapsto \underbrace{(\gamma_i(x_0) + \gamma_{i-1}(x_1) + \cdots + \gamma_0(x_i))}_{{}''\frac{\mathcal{W}_{\mathcal{O},i}(\underline{x})}{\pi^i}}{}_i \end{aligned}$$

Si de plus $\delta_n(J) = 0$ pour $n \gg 0$ il y a une application

$$\widehat{W}_{\mathcal{O}}(J) \xrightarrow{\log} J^{(\mathbb{N})} = \text{Lie } \widehat{W}_{\mathcal{O}} \otimes J$$

Si de plus les \mathcal{O} -P.D. sont nilpotentes alors l'application précédente est un isomorphisme.

Démonstration. Pour la première assertion il suffit de vérifier que l'enveloppe à \mathcal{O} -P.D. de $\mathcal{O}[X_i]_{i \geq 0}$ par rapport à $(X_i)_{i \geq 0}$ est sans π -torsion et on se ramène alors à montrer que $\widehat{W}_{\mathcal{O}}(J) \rightarrow J^{\mathbb{N}}$ est un morphisme lorsque π est inversible, ce qui est clair. Le reste est facile. \square

Remarque B.21. — Du côté de $J^{\mathbb{N}}$ les opérateurs F, V et $[a]$ sont donnés par

$$\begin{aligned} [a] \cdot (y_i)_i &= (ay_i)_i \\ {}^V(y_i)_i &= (0, y_0, y_1, \dots, y_i, \dots) \\ {}^F(y_i)_i &= (\pi y_1, \pi y_2, \dots, \pi y_i, \dots) \end{aligned}$$

Proposition B.22. — *Soit G un \mathcal{O} -module formel sur un \mathcal{O} -schéma et J un idéal muni de \mathcal{O} -puissances divisées γ telles que localement $\delta_n(J) = 0$ pour $n \gg 0$ (par exemple, π est localement nilpotent). Il existe alors une unique application logarithme fonctorielle en (G, J, γ)*

$$\log_G : G(J) \longrightarrow \text{Lie } G \otimes J$$

compatible avec celle définie pour $\widehat{W}_{\mathcal{O}}$. Si les \mathcal{O} -P.D. sont nilpotentes cette application est un isomorphisme.

Démonstration. Soit

$$M = \text{Hom}(\widehat{W}_{\mathcal{O}}, G)$$

le module de Cartier de G , un $\mathbb{E}_{\mathcal{O}}$ -module. Alors,

$$G(J) \simeq \widehat{W}_{\mathcal{O}}(J) \otimes_{\mathbb{E}_{\mathcal{O}}} M$$

où $\mathbb{E}_{\mathcal{O}}$ agit sur $\widehat{W}_{\mathcal{O}}$ de telle manière que

$$x \otimes {}^F m = {}^V x \otimes m, \quad x \otimes {}^V m = {}^F x \otimes m, \quad x \otimes [a]m = [a]x \otimes m$$

Posons

$$\log_G : \widehat{W}_{\mathcal{O}}(J) \otimes_{\mathbb{E}_{\mathcal{O}}} M \longrightarrow J^{(\mathbb{N})} \otimes_{\mathbb{E}_{\mathcal{O}}} M$$

où $J^{(\mathbb{N})}$ est un $\mathbb{E}_{\mathcal{O}}$ -module via les formules de la remarque B.21. Alors,

$$J^{(\mathbb{N})} = J \oplus I_J$$

où

$$\begin{aligned} J &= J \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus \cdots \\ I_J &= 0 \oplus J^{(\mathbb{N})} = {}^V J^{(\mathbb{N})} \end{aligned}$$

De plus remarquons que

$$\boxed{{}^F J = 0}$$

On en déduit aussitôt que

$$J^{(\mathbb{N})} \otimes_{\mathbb{E}_{\mathcal{O}}} M = J \otimes_R M / VM$$

\square

Remarque B.23. — L'annulation ${}^F J = 0$ utilisée dans la démonstration précédente est à la base des liens reliant puissances divisées et théorie de Cartier, cf. par exemple le lemme 38 de [29].

Remarque B.24. — La notation \log_G n'est pas correcte, on devrait plutôt noter $\log_{G, \gamma}$.

Corollaire B.25. — Soit G un \mathcal{O} -module formel sur Σ un \mathcal{O} -schéma et $S = \Sigma \bmod \pi$. Soit $\mathcal{I}_{S/\Sigma}$ l'idéal à puissances divisées sur $NCRIS_{\mathcal{O}}(S/\Sigma)$. Il y a alors un isomorphisme

$$G(\mathcal{I}_{S/\Sigma}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie} G \otimes_{\mathcal{O}_{\Sigma}} \mathcal{I}_{S/\Sigma}$$

Proposition B.26. — Soit (G, J, γ) comme précédemment. Supposons que $J^2 = \pi J = 0$. Soit $\alpha : \mathrm{Lie} G / \pi \mathrm{Lie} G \rightarrow \mathrm{Lie} G / \pi \mathrm{Lie} G$ l'application Frob_q -linéaire qui à une dérivation invariante d associe d^q . L'application $\gamma : J \rightarrow J$ est Frob_q -linéaire et il y a un diagramme commutatif naturel en (G, J, γ)

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Lie} G \otimes J \equiv \mathrm{Lie} G / \pi \mathrm{Lie} G \otimes J & \\ \nearrow \scriptstyle \text{can} & & \downarrow \scriptstyle \text{Id} + \alpha \otimes \gamma \\ G(J) & & \\ \searrow \scriptstyle \text{log}_G & & \\ & \mathrm{Lie} G \otimes J \equiv \mathrm{Lie} G / \pi \mathrm{Lie} G \otimes J & \end{array}$$

où can est l'isomorphisme définissant $\mathrm{Lie} G$.

Démonstration. Si M est le module de Cartier de G et $\pi = 0$ sur la base, l'application α est $F : M/VM \rightarrow M/VM$ qui est bien définie puisque $FV = VF$. Pour vérifier l'assertion il suffit de la faire pour $\widehat{W}_{\mathcal{O}}$. En effet, après choix d'une V -base du module de Cartier de G il existe une surjection $\oplus \widehat{W}_{\mathcal{O}}(J) \rightarrow G(J)$ et par naturalité du \log en le groupe formel (éventuellement de dimension infinie) on conclut.

Dans le cas de $\widehat{W}_{\mathcal{O}}$,

$$\begin{aligned} \text{can} : \widehat{W}_{\mathcal{O}}(J) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie} \widehat{W}_{\mathcal{O}} \otimes J = J^{(\mathbb{N})} \\ \sum_{i \geq 0} V^i[x_i] &\mapsto (x_i)_{i \geq 0} \end{aligned}$$

et $\alpha((x_i)_{i \geq 0}) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Étant donné que $\pi J = 0$, $\forall i \geq 2 \delta_i(J) = 0$ donc

$$\log \left(\sum_{i \geq 0} V^i[x_i] \right) = (x_0, x_1 + \gamma(x_0), \dots, x_i + \gamma(x_{i-1}), \dots)$$

d'où le résultat. \square

Remarque B.27. — Lorsque $J^2 = 0$ l'isomorphisme can correspond au cas du logarithme lorsque l'on muni l'idéal des \mathcal{O} -P.D. triviales $\gamma = 0$.

B.5.3. Exponentielle. — Nous n'utiliserons pas la proposition qui suit plus tard car nous aurons besoin d'exponentier des morphismes pas seulement sur la partie formelle de nos groupes mais sur tout le groupe. Néanmoins cette proposition est complémentaire de celle que nous utiliserons (noter par exemple que les \mathcal{O} -P.D. ne sont pas nilpotentes dans la proposition qui suit ce qui est compensé par le fait que nos groupes sont formels).

Proposition B.28. — Soient G et H deux \mathcal{O} -modules formels sur T et $J \subset \mathcal{O}_T$ un idéal cohérent muni de \mathcal{O} -P.D. γ . Il existe alors une application

$$\exp : \mathrm{Hom}(G, \widehat{J \cdot \mathrm{Lie} H}) \rightarrow \ker(\mathrm{Hom}(G, H) \rightarrow \mathrm{Hom}(G \bmod J, H \bmod J))$$

où si $\widehat{\mathrm{Lie} H}$ désigne le groupe de Lie formel associé à $\mathrm{Lie} H$ alors $\widehat{J \cdot \mathrm{Lie} H}$ est le sous-foncteur de $\widehat{\mathrm{Lie} H}$ défini par $(\widehat{J \cdot \mathrm{Lie} H})(Z) = \Gamma(Z, \mathrm{Lie} H \otimes J(\mathcal{O}_Z)_{\mathrm{nilp}})$. Cette application est naturelle en (G, H, J, γ) .

Si $J^2 = (0)$ et $\gamma = 0$ alors l'application précédente coïncide avec l'application identité donnée par $\mathrm{Lie} H \otimes J \simeq \ker(H \rightarrow H \bmod J)$

$$(5) \quad \ker(\mathrm{Hom}(G, H) \rightarrow \mathrm{Hom}(G \bmod J, H \bmod J)) = \mathrm{Hom}(G, J \mathrm{Lie} H)$$

Si $J^2 = \pi J = (0)$, soit $\alpha : \text{Lie } H / \pi \text{ Lie } H \rightarrow \text{Lie } H / \pi \text{ Lie } H$ l'application qui à une dérivation invariante d associe d^q et $\Pi = \alpha \otimes \gamma$ l'endomorphisme Frob_q -linéaire de $J\text{Lie } H$. Alors, naturellement en (G, H, J, γ) , via l'isomorphisme canonique (5)

$$\exp f = \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n \Pi^n \right) \circ f$$

où la somme infinie est finie lorsqu'elle est évaluée sur une algèbre nilpotente puisque $\text{Im } f \subset \widehat{J\text{Lie } H}$.

Remarque B.29. — Si $G = \widehat{\mathcal{M}}$ où \mathcal{M} est un module localement libre de rang fini, il y a un morphisme $\text{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{M}, J\text{Lie } H) \rightarrow \text{Hom}(\widehat{\mathcal{M}}, \widehat{J\text{Lie } H})$, d'où une application exponentielle de source $\text{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{M}, J\text{Lie } H)$.

Remarque B.30. — La formule donnée pour $\exp f$ lorsque $J^2 = \pi J = 0$ coïncide bien avec celle de [22] ((2.6.6.3) page 142) lorsque $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$. En effet, si $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ sont des puissances divisées alors $\gamma_{p^n} \equiv (-1)^n \gamma_p^n \pmod{p}$.

Démonstration. Si Q est un \mathcal{O}_T -module notons $C(Q)$ le $\mathbb{E}_{\mathcal{O}}$ -module à gauche défini par

$$C(Q) = Q^{\mathbb{N}} = \left\{ \sum_{i \geq 0} V^i x_i \mid x_i \in Q \right\}$$

sur lequel

$$\begin{aligned} V \sum_{i \geq 0} V^i x_i &= \sum_i V^{i+1} x_i \\ F \sum_{i \geq 0} V^i x_i &= \pi \sum_{i \geq 1} V^{i-1} x_i \\ [a] \sum_{i \geq 0} V^i x_i &= \sum_{i \geq 0} V^i (a^{q^i} x_i) \end{aligned}$$

Lorsque Q est localement libre de rang fini $C(Q)$ est le module de Cartier de \widehat{Q} . De l'isomorphisme $W_{\mathcal{O}}(J) \simeq J^{\mathbb{N}}$ du lemme B.20 on déduit une décomposition $W_{\mathcal{O}}(J) = J \oplus {}^V W_{\mathcal{O}}(J)$ et donc $J \hookrightarrow \mathbb{E}_{\mathcal{O}}$. Soit M le module de Cartier de H . L'application de réduction modulo VM induit un isomorphisme

$$\psi : JM \xrightarrow{\sim} J.(M/VM) = J \otimes M/VM$$

Il suffit en effet de vérifier que $JM \cap VM = (0)$, mais si $(e_{\alpha})_{\alpha}$ est une V -base de M et $(\lambda_{\alpha})_{\alpha}$ une famille d'éléments de J alors $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} e_{\alpha} \in VM \Leftrightarrow \forall a \mathcal{W}_{\mathcal{O},0}(\lambda_a) = 0 \Leftrightarrow \forall \alpha \lambda_{\alpha} = 0$.

De plus, l'inverse de cet isomorphisme induit un morphisme de $\mathbb{E}_{\mathcal{O}}$ -modules

$$\begin{aligned} \Xi : C(J \otimes M/VM) &\longrightarrow M \\ \sum_i V^i x_i &\longmapsto \sum_i V^i \psi^{-1}(x_i) \end{aligned}$$

En effet, cela résulte aussitôt de ce que ${}^F J = (0)$. L'application exponentielle s'écrit alors comme la composée

$$\text{Hom}(G, \widehat{J\text{Lie } H}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{E}_{\mathcal{O}}}(M_G, C(JM/VM)) \xrightarrow{\Xi_*} \text{Hom}_{\mathbb{E}_{\mathcal{O}}}(M_G, M) = \text{Hom}(G, H)$$

où M_G est le module de Cartier de G et où il faut vérifier que si $f : G \rightarrow \widehat{J\text{Lie } H} \hookrightarrow \widehat{\text{Lie } H}$ alors le morphisme $M_G \rightarrow C(\text{Lie}(H))$ se factorise par $C(J\text{Lie } H)$, mais cela résulte de la description des modules de Cartier en termes de courbes p -typiques.

Quant aux deux dernières assertions concernant les cas $J^2 = 0$ et $\gamma = 0$, resp. $J^2 = \pi J = 0$, soient $x \in J$ et $\bar{m} \in M/VM$. Voyons x comme élément de $J \subset W(J)$ grâce à γ . Alors $x = \sum_i V^i[a_i]$ où $a_0 = x$, $a_i = 0$ si $i > 0$ lorsque $\gamma = 0$ et $a_i = (-1)^i \gamma^i(x)$ si $\pi J = 0$. Dès lors

$$xm = \sum_{i \geq 0} (-1)^i V^i[a_i] F^i.m \in JM$$

Or, lorsque $\pi = 0$, $F^i : M/VM \rightarrow M/VM$ s'identifie à α^i . On en déduit facilement le résultat. \square

Remarque B.31. — Le lien entre le logarithme de la section précédente et l'exponentielle de la proposition précédente est que l'exponentiation des morphismes est obtenues par exponentiation des courbes p -typiques via $\log_H : H(YJ[[Y]]) \xrightarrow{\sim} \text{Lie}H \otimes YJ[[Y]] = C(\text{Lie}H \otimes J)$.

Voici la proposition que nous utiliserons.

Proposition B.32. — Soit T un \mathcal{O} -schéma, $J \subset \mathcal{O}_T$ un idéal cohérent muni de \mathcal{O} -P.D. nilpotentes. Soit G un schéma en \mathcal{O} -modules plat sur T . Soit H un faisceau en \mathcal{O} -modules sur T_{fppf} tel que \hat{H} soit un \mathcal{O} -module formel. Il y a alors une application d'exponentiation

$$\exp : \text{Hom}(G, J.\text{Lie}H) \rightarrow \ker(\text{Hom}(G, H) \rightarrow \text{Hom}(G \bmod J, H \bmod J))$$

telle que si $J^2 = 0$ et $\gamma = 0$, via l'identification canonique de $\ker(\text{Hom}(G, H) \rightarrow \text{Hom}(G \bmod J, H \bmod J))$ avec $\text{Hom}(G, J.\text{Lie}H)$, $\exp = \text{Id}$. Si $J^2 = \pi J = 0$ et $\Pi = \alpha \otimes \gamma$ est l'endomorphisme nilpotent Frob_q -linéaire de $J.\text{Lie}H = \text{Lie}H/\pi \text{Lie}H \otimes J$ alors

$$\exp f = \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n \Pi^n \right) \circ f$$

Démonstration.

Le schéma G étant plat sur T il suffit de définir $(\exp f)_U : G(U) \rightarrow H(U)$ pour tout schéma U affine et plat sur T (i.e. définir $\exp f$ comme morphisme de faisceaux sur le petit site plat de T). Soit donc $U \rightarrow T$ plat. Alors, d'après le lemme B.18, les \mathcal{O} -P.D. γ s'étendent à $J\mathcal{O}_U$, d'où un isomorphisme (proposition B.22)

$$\log_G : \hat{H}(J\mathcal{O}_U) \xrightarrow{\sim} \text{Lie}H \otimes_{\mathcal{O}_T} J\mathcal{O}_U = J\text{Lie}H \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_U$$

Posons

$$(\exp f)_U : G(U) \rightarrow \Gamma(U, J\text{Lie}H) \xrightarrow{\log^{-1}} \hat{H}(\Gamma(U, J\mathcal{O}_U)) \subset H(U)$$

On vérifie aussitôt que cette définition est fonctorielle en U . Les assertions concernant les cas $J^2 = 0$ ou $J^2 = \pi J = 0$ se déduisent de la proposition B.26. \square

B.6. Extension du cristal de Messing généralisé aux \mathcal{O} -puissances divisées. — Il y a un morphisme de sites

$$\Pi_{\mathcal{O}} : \text{NCRIS}_{\mathcal{O}}(S/\Sigma) \rightarrow \text{NCRIS}(S/\Sigma)$$

puisque les puissances divisées classiques induisent des \mathcal{O} -puissances divisées.

Théorème B.33. — Soit H un \mathcal{O} -module π -divisible sur S . Soit \mathcal{E} le cristal algèbre de Lie de la \mathcal{O} -extension vectorielle universelle sur $\text{NCRIS}_{\mathcal{O}}(S/\Sigma)$ défini dans la proposition B.8. Ce cristal s'étend naturellement à $\text{NCRIS}_{\mathcal{O}}(S/\Sigma)$ au sens où il existe un cristal en $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ -modules localement libres \mathcal{F} sur $\text{NCRIS}_{\mathcal{O}}(S/\Sigma)$ tel que $\mathcal{E} = \Pi_{\mathcal{O}*}\mathcal{F}$ (et donc nécessairement $\mathcal{F} = \Pi_{\mathcal{O}}^*\mathcal{E}$). De plus, si $(U \hookrightarrow T) \in \text{NCRIS}_{\mathcal{O}}(S/\Sigma)$ et \tilde{H} est un relèvement de $H \times_S U$ à T alors $\mathcal{F}_{(U \hookrightarrow T)}$ s'identifie à $\text{Lie}E_{\mathcal{O}}(\tilde{H})$. De plus $G \mapsto \mathcal{F}$ est fonctoriel en G .

Remarque B.34. — En fait, on étend directement le cristal \mathcal{O} -extension vectorielle universelle à $\text{NCRIS}_{\mathcal{O}}(S/\Sigma)$.

Démonstration. La démonstration utilise l'application exponentielle construite dans la proposition B.32 et suit celle de [22]. Faisons tout de même remarquer au lecteur qu'elle n'est pas indépendante de [22] puisque la proposition clef B.5 qui permet d'affirmer que $E_{\mathcal{O}}(H)$ existe et est extension de H par $V_{\mathcal{O}}(H)$ localement libre utilise [22] (c'est surtout le fait que $V_{\mathcal{O}}(H)$ soit localement libre qui est crucial).

Comme dans [22] tout repose sur le théorème suivant analogue du théorème 2.2 page 129 de [22]

Théorème B.35. — Soit $(S \hookrightarrow T) \in \text{NCRIS}_{\mathcal{O}}(S/\Sigma)$ et H_1, H_2 deux \mathcal{O} -modules π -divisibles sur T de réduction $H_{1/S}, H_{2/S}$. Soit $f : H_{1/S} \rightarrow H_{2/S}$. Il existe alors un unique morphisme

$$g : E_{\mathcal{O}}(H_1) \rightarrow E_{\mathcal{O}}(H_2)$$

tel que $\forall u : V_{\mathcal{O}}(H_1) \rightarrow V_{\mathcal{O}}(H_2)$ relevant $V_{\mathcal{O}}(f) : V_{\mathcal{O}}(H_{1/S}) \rightarrow V_{\mathcal{O}}(H_{2/S})$, dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathcal{O}}(H_1) & \xhookrightarrow{i} & E_{\mathcal{O}}(H_1) \\ \downarrow u & & \downarrow g \\ V_{\mathcal{O}}(H_2) & \xhookrightarrow{i} & E_{\mathcal{O}}(H_2) \end{array}$$

$$g \circ i - i \circ u \in \exp(\text{Hom}(V_{\mathcal{O}}(H_1), J.\text{Lie } E_{\mathcal{O}}(H_2)))$$

où J est l'idéal de S dans T et \exp est l'application définie dans la proposition B.32.

La démonstration de ce théorème repose sur l'analogue du lemme 2.6.3 page 135 de [22] :

Lemme B.36. — Soit H un \mathcal{O} -module π -divisible sur T et $N \gg 0$ tel que $\pi^N \mathcal{O}_T = 0$ et $\omega_{H[\pi^N]^D}$ soit localement libre. Soit $I = \ker(\mathcal{O}_T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_T)$ et

$$\alpha : H[\pi^N] \rightarrow \omega_{H[\pi^N]^D}/I.\text{Lie } E(H) = V_{\mathcal{O}}(H)$$

l'application universelle telle que

$$\alpha_* \left(0 \rightarrow H[\pi^N] \rightarrow H \xrightarrow{\pi^N} H \rightarrow 0 \right) = (0 \rightarrow V_{\mathcal{O}}(H) \rightarrow E_{\mathcal{O}}(H) \rightarrow H \rightarrow 0)$$

Soit \mathcal{F} un faisceau en \mathcal{O} -modules sur T_{fppf} tel que $\widehat{\mathcal{F}}$ soit un \mathcal{O} -module formel. Soit un diagramme \mathcal{O} -équivariant

$$\begin{array}{ccc} H[\pi^N] & & \\ \downarrow \alpha & \searrow v & \\ V_{\mathcal{O}}(H) & \xrightarrow{w} & \mathcal{F} \end{array}$$

qui commute après réduction sur S et tel que si

$$v_* \left(0 \rightarrow H[\pi^N] \rightarrow H \xrightarrow{\pi^N} H \rightarrow 0 \right) = (\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow H \rightarrow 0)$$

alors l'action de \mathcal{O} sur $\text{Lie } \mathcal{G}$ est l'action naturelle donnée par $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_S$. Il existe alors un unique morphisme \mathcal{O} -équivariant $w' : V_{\mathcal{O}}(H) \rightarrow \mathcal{F}$ tel qu'en remplaçant w par w' le diagramme précédent commute, $w' \equiv w$ sur S et $w' - w$ soit une exponentielle.

Démonstration. la démonstration est identique à celle de [22] : on dévise au cas $J^2 = \pi J = 0$ puis on utilise la formule explicite donnée dans la proposition B.32 pour \exp dans ce cas là. Ce qu'il faut vérifier c'est que les dévisages n'affectent pas l'hypothèse de l'action de \mathcal{O} sur l'objet noté $\text{Lie } \mathcal{G}$ dans l'énoncé. Mais cela ne pose pas de problème puisque la seule modification faite au morphisme v est $v \mapsto v - w \circ \alpha$, or $w \circ \alpha$ est tel que si ξ est l'extension $0 \rightarrow H[\pi^N] \rightarrow H \xrightarrow{\pi^N} H \rightarrow 0$ alors $(w \circ \alpha)_* \xi = w_*(\alpha_* \xi)$ mais \mathcal{O} agit naturellement via $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_S$ sur $\text{Lie } (\alpha_* \xi)$ et on en déduit le résultat d'après le lemme B.37 qui suit.

La fin de l'argument page 143 de [22] se modifie en utilisant que sur S , $\alpha : H[\pi^N]_{/S} \rightarrow V_{\mathcal{O}}(H_{/S})$ est universel pour les \mathcal{O} -morphisms β de $H[\pi^N]_{/S}$ vers un \mathcal{O}_S -module cohérent \mathcal{M}

tel que si ξ est l'extension précédente alors \mathcal{O} agisse naturellement sur $\mathrm{Lie} \beta_* \xi$. Il faut également utiliser de nouveau le lemme B.37 appliqué à $(\sum (-1)^n \Pi^n)^{-1}$.

Lemme B.37. — *Les classes des extensions $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow 0$ de \mathcal{O} -modules sur S_{fppf} telles que \mathcal{O} agisse naturellement sur $\mathrm{Lie} E_2$ via $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_S$ forment un sous \mathcal{O} -module de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}}(E_1, E_2)$. Ces classes sont stables par image directe via un morphisme \mathcal{O} -linéaire $u : E_1 \rightarrow E'_1$ tel que \mathcal{O} agisse naturellement sur $\mathrm{Lie} E'_1$ et induisant $u_* : \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}}(E_1, E_2) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}}(E'_1, E_2)$.*

Démonstration. Elle est facile et laissée au lecteur. \square

Expliquons maintenant quels sont les arguments à adapter dans la démonstration du théorème. La principale chose à vérifier est que l'on peut appliquer le lemme B.36 dans la démonstration de l'équivalent du lemme 2.7.4 de [22]. Plus précisément, avec les notations de ce lemme dans [22], il faut vérifier que si $v' : G \rightarrow E_{\mathcal{O}}(H)$ est l'unique relèvement de v'_0 alors, si

$$\xi = \left(0 \rightarrow G[\pi^N] \rightarrow G \xrightarrow{\pi^N} G \rightarrow 0 \right)$$

\mathcal{O} agit naturellement sur $\mathrm{Lie}(v'_{[G[\pi^N]]})_* \xi$. Mais $(v'_{[G[\pi^N]]})_* \xi$ est une extension scindée. Son algèbre de Lie est donc une extension scindée de $\mathrm{Lie} E_{\mathcal{O}}(H)$ par $\mathrm{Lie} G$, d'où l'assertion.

Le reste de la démonstration en bas de la page 145 jusqu'à la page 146 s'adapte immédiatement en remplaçant les Hom et Ext par des $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}$ et $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}}$. \square

B.7. Théorie de la déformation des \mathcal{O} -modules π -divisibles. —

Théorème B.38. — *Soit $(S \hookrightarrow T) \in \mathrm{NCRIS}_{\mathcal{O}}(S/\Sigma)$. Soit \mathcal{C} la catégorie des \mathcal{O} -modules π -divisibles sur T . Soit \mathcal{D} la catégorie des \mathcal{O} -modules π -divisibles sur S munis d'une filtration localement facteur directe de leur cristal généralisé évalué sur $S \hookrightarrow T$ (cf. théorème précédent) déformant la partie vectorielle de leur \mathcal{O} -extension vectorielle universelle. Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ le foncteur qui à H sur T associe $(H \times_T S, V_{\mathcal{O}}(H) \hookrightarrow \mathcal{F}_{(S \hookrightarrow T)})$. Alors, F induit une équivalence de catégories.*

Démonstration. La démonstration est absolument identique à celle du théorème 1.6 page 151 du chapitre V de [22]. \square

B.8. Théorie de Dieudonné “classique” des \mathcal{O} -modules π -divisibles. — Soit k un corps parfait extension du corps résiduel de \mathcal{O} et H un \mathcal{O} -module π -divisible sur k . Soit σ le Frobenius de $W(k)$. Soit $\mathbb{D}(H)$ le module de Dieudonné de H , un $W(k)$ -module libre de rang $\mathrm{ht} H$ muni de $\varphi : \mathbb{D}(H) \rightarrow \mathbb{D}(H)$ une application σ -linéaire induisant un isomorphisme après inversion de p .

L'action de \mathcal{O} sur $\mathbb{D}(H)$ muni celui-ci d'une structure de $W(k) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}$ -module. Donc,

$$\mathbb{D}(H) = \bigoplus_{\tau : F^0 \hookrightarrow W(K)_{\mathbb{Q}}} \mathbb{D}(H)_{\tau}$$

où $\mathbb{D}(H)_{\tau}$ est un $\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_{F^0}, \tau} W(k)$ -module libre. De plus,

$$\varphi : \mathbb{D}(H)_{\tau} \rightarrow \mathbb{D}(H)_{\sigma\tau}$$

Rappelons que k est une extension du corps résiduel de \mathcal{O} . Cela définit canoniquement un $\tau_0 : F^0 \hookrightarrow W(k)_{\mathbb{Q}}$ qui définit lui-même un isomorphisme

$$\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_{F^0}, \tau} W(k) \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}}(k)$$

Soit $\sigma_{\mathcal{O}}$ le Frobenius de $W_{\mathcal{O}}(k)$.

Définition B.39. — On note $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H) = \mathbb{D}(H)_{\tau_0}$, un $W_{\mathcal{O}}(k)$ -module libre de rang $\mathrm{ht}_{\mathcal{O}} H = \frac{\mathrm{ht} H}{[F : \mathbb{Q}_p]}$. Il est muni d'un opérateur $\sigma_{\mathcal{O}}$ -linéaire $\varphi = \frac{\pi}{p^{[F^0 : \mathbb{Q}_p]}} \varphi^{[F^0 : \mathbb{Q}_p]}$.

Proposition B.40. — *Le foncteur $H \mapsto (\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H), \varphi_{\mathcal{O}})$ induit une équivalence entre la catégorie des \mathcal{O} -modules π -divisibles sur k et celle des couples (M, φ) où M est un $W_{\mathcal{O}}(k)$ -module libre de rang fini et $\varphi : M \rightarrow M$ est une application $\sigma_{\mathcal{O}}$ -linéaire telle que $\pi M \subset \varphi(M)$.*

Démonstration. Il suffit de voir que $(D, \varphi) \mapsto (D_{\tau_0}, \frac{\pi}{p^{[F^0:\mathbb{Q}_p]}} \varphi^{[F^0:\mathbb{Q}_p]})$ induit une équivalence entre les couples sur $W(k)$ (D, φ) tels que $pD \subset \varphi(D) \subset D$ et si $V = p\varphi^{-1}$ alors \mathcal{O} agit naturellement sur D/VD et les (M, φ) comme dans l'énoncé. Mais si $D = \bigoplus_{\tau} D_{\tau}$,

$$V : D_{\tau} \longrightarrow D_{\sigma^{-1}\tau} \text{ et } D/VD = \bigoplus_{\tau} D_{\tau}/VD_{\sigma\tau}$$

et donc,

$$\forall \tau \neq \tau_0 \quad V : D_{\sigma\tau} \xrightarrow{\sim} D_{\tau}$$

est un isomorphisme tandis que

$$D/VD = D_{\tau_0}/VD_{\sigma\tau_0}$$

On en déduit que $VD_{\sigma\tau_0} = V^{[F^0:\mathbb{Q}_p]}D_{\tau_0}$ et en posant $V_{\mathcal{O}} = V^{[F^0:\mathbb{Q}_p]}$ on en déduit facilement que $(D, V) \mapsto (D_{\tau_0}, V_{\mathcal{O}})$ est une équivalence avec les couples tels que $\pi D \subset V_{\mathcal{O}}D$. On a alors $\varphi_{\mathcal{O}}V_{\mathcal{O}} = \pi$. \square

Proposition B.41. — *Supposons $p \neq 2$. Soit \mathcal{E} le cristal de H algèbre de Lie de la \mathcal{O} -extension vectorielle universelle sur $\text{NCRIS}_{\mathcal{O}}(\text{Spec}(k)/\text{Spec}(\mathcal{O}))$. Le morphisme de Frobenius $F : H \longrightarrow H^{(q)}$ commute à l'action de \mathcal{O} et définit donc $F : \text{Fr}_q^* \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$. Alors, $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H)$ s'identifie à*

$$\Gamma(\text{Spec}(k) \hookrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}), \mathcal{E})$$

et φ au morphisme induit par F .

Démonstration. Soit \mathcal{E}' le cristal de H algèbre de Lie de l'extension vectorielle universelle sur $\text{NCRIS}(\text{Spec}(k)/\text{Spec}(W(k)))$. Alors,

$$\mathbb{D}(H) \simeq \Gamma(\text{Spec}(k) \hookrightarrow \text{Spec}(W(k)), \mathcal{E}')$$

et par la propriété de cristal

$$\mathbb{D}(H) \otimes_{W(k)} \mathcal{O} \simeq \Gamma(\text{Spec}(\mathcal{O}/p\mathcal{O}) \hookrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}), \mathcal{E}')$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(H)_{\tau_0} &= (\mathbb{D}(H) \otimes_{W(k)} \mathcal{O})_{\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}} \mathcal{O} \\ &\simeq \Gamma(\text{Spec}(\mathcal{O}/p\mathcal{O}) \hookrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}), \Pi_{\mathcal{O}*} \mathcal{E}) \\ &= \Gamma(\text{Spec}(\mathcal{O}/p\mathcal{O}) \hookrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}), \mathcal{E}) \\ &= \Gamma(\text{Spec}(k) \hookrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}), \mathcal{E}) \end{aligned}$$

\square

Références

- [1] V.G. Berkovich. Étale cohomology for non-archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 78 :5–161, 1993.
- [2] P. Berthelot, L. Breen, and W. Messing. *Théorie de Dieudonné cristalline. II*, volume 930. Springer-Verlag, Berlin, Lecture Notes in Mathematics, 1982.
- [3] P. Berthelot and A. Ogus. F-isocrystals and de Rham cohomology. I. *Invent. Math.*, 72(2) :159–199, 1983.
- [4] S. Bosch, W. Lütkebohmert, and M. Raynaud. Formal and rigid geometry. IV. the reduced fibre theorem. *Invent. Math.*, 119(2) :361–398.
- [5] A. J. de Jong. Crystalline dieudonné module theory via formal and rigid geometry. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 82 :5–96, 1995.
- [6] V. G. Drinfel'd. Elliptic modules. *Mat. Sb. (N.S.)*, 136(94) :594–627, 1974.
- [7] V.G. Drinfeld. Coverings of p -adic symmetric domains. *Functional Analysis and its Applications*, 10(2) :29–40, 1976.
- [8] G. Faltings. Almost étale extensions. In *Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques, II.*, volume 279 of *Astérisque*, pages 185–270, 2002.

- [9] G. Faltings. Group schemes with strict \mathcal{O} -action. *Mosc. Math. J.*, 2(2) :249–279, 2002.
- [10] G. Faltings. A relation between two moduli spaces studied by V. G. Drinfeld. In *Algebraic number theory and algebraic geometry*, volume 300 of *Contemp. Math.*, pages 115–129, 2002.
- [11] L. Fargues. Application de Hodge-Tate duale d’un groupe de Lubin-Tate, immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire et filtrations de ramification. *preprint*.
- [12] L. Fargues. L’isomorphisme entre les tours de lubin-tate et de drinfeld : comparaison de la cohomologie des deux tours. *preprint*.
- [13] L. Fargues. L’isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld : démonstration du résultat principal. *preprint*.
- [14] L. Fargues. L’isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld au niveau des points. *preprint*.
- [15] L. Fargues. Cohomologie des espaces de modules de groupes p -divisibles et correspondances de langlands locales. In *Variétés de Shimura, espaces de Rapoport-Zink et Correspondances de Langlands locales*, *Asterisque* 291, 2004.
- [16] M. Harris. The local Langlands correspondence : Notes of (half) a course at the IHP, Spring 2000. *A paraître dans Asterisque*.
- [17] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [18] B. H. Hopkins, M. Gross. Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space. In *Topology and representation theory (Evanston, IL, 1992)*, volume 158 of *Contemp. Math.*, pages 23–88. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [19] R. Huber. *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*. Aspects of Mathematics. Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1996.
- [20] R. Kiehl. Ausgezeichnete ringe in der nichtarchimedischen analytischen geometrie. *J. Reine Angew. Math.*, 234 :89–98, 1969.
- [21] J. Lubin. Canonical subgroups of formal groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 251 :103–127, (1979).
- [22] W. Messing. The crystals associated to Barsotti-Tate groups : with applications to abelian schemes. *Lecture Notes in Mathematics*, 264, 1972.
- [23] Frans Oort. Newton polygons and formal groups : conjectures by Manin and Grothendieck. *Ann. of Math.*, 152(1) :183–206, 2000.
- [24] M. Rapoport, Th. Zink. *Period spaces for p -divisible groups*. Number 141 in *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [25] Michel Raynaud and L. Gruson. Critères de platitude et de projectivité. Techniques de platification d’un module. *Invent. Math.*, 13 :1–89, 1971.
- [26] P. Valabrega. On the excellent property for power series rings over polynomial rings. *J. Math. Kyoto Univ.*, 15(2) :387–395, 1975.
- [27] P. Valabrega. A few theorems on completion of excellent rings. *Nagoya Math. J.*, 61 :127–133, 1976.
- [28] Jiu-Kang Yu. On the moduli of quasi-canonical liftings. *Compositio Math.*, 96(3) :293–321, 1995.
- [29] Thomas Zink. The display of a formal p -divisible group. In *Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques (I)*, *Astérisque* 278, pages 127–248, 2002.